目　录

第一章　概论

1.1　Fourier 分析到小波分析 ………………………………（2）
1.2　积分小波变换和时间-频率分析 ………………………（7）
1.3　反演公式和对偶 ………………………………………（11）
1.4　小波的分类 ……………………………………………（17）
1.5　多分辨分析、样条及小波 ……………………………（21）
1.6　小波分解与重构 ………………………………………（24）

第二章　Fourier 分析

2.1　Fourier 变换与 Fourier 逆变换 ………………………（30）
2.2　连续时间卷积和 δ 函数 …………………………（35）
2.3　平方可积函数的 Fourier 变换 ………………………（40）
2.4　Fourier 级数 ……………………………………………（46）
2.5　基本收敛定理和 Poisson 求和公式 …………………（57）

第三章　小波变换和时间-频率分析

3.1　Gabor 变换 ……………………………………………（66）
3.2　短时 Fourier 变换和测不准原理 ……………………（71）
3.3　积分小波变换 …………………………………………（80）
3.4　二进小波和反演 ………………………………………（86）
3.5　框架 ……………………………………………………（91）

3.6 小波级数 …………………………………………… (99)

第四章 基数样条分析

4.1 基数样条空间 …………………………………… (109)
4.2 B-样条及其基本性质 ……………………………… (114)
4.3 两尺度关系和插入图形显示算法 ………………… (122)
4.4 基数样条的 B-网表示与计算 …………………… (128)
4.5 样条逼近公式的构造 ……………………………… (135)
4.6 样条插值公式的构造 ……………………………… (148)

第五章 尺度函数与小波

5.1 多分辨分析 ………………………………………… (161)
5.2 有限两尺度关系的尺度函数 ……………………… (172)
5.3 $L^2(\mathbb{R})$的直接和分解 ……………………………… (189)
5.4 小波和它们的对偶 ………………………………… (198)
5.5 线性相位滤波 ……………………………………… (217)
5.6 紧支撑小波 ………………………………………… (229)

第六章 基数样条小波

6.1 插值样条小波 ……………………………………… (244)
6.2 紧支撑样条小波 …………………………………… (251)
6.3 基数样条小波的计算 ……………………………… (258)
6.4 Euler-Frobenius 多项式 ………………………… (268)
6.5 样条小波分解中的误差分析 ……………………… (275)
6.6 全正性、完全振荡及零交叉 ……………………… (287)

第七章 正交小波和小波包

7.1 正交小波的例子 …………………………………… (297)
7.2 正交两尺度符号的识别 …………………………… (304)

7.3 紧支撑正交小波的构造 …………………………… (317)
7.4 正交小波包 …………………………………… (328)
7.5 小波级数的正交分解 ……………………………… (333)

注解 …………………………………………………… (338)
附录 A …………………………………………………… (345)
参考文献 ………………………………………………… (348)
索引 …………………………………………………… (355)

第一章 概 论

“小波”(Wavelets)是目前在许多科学和工程技术聚会中的一个非常广泛的话题。有些人认为小波可以作为表示函数的一种新的基底；还有些人认为小波可作为时间-频率分析的一种技术；而另外有些人则把小波看作是一个新的数学学科。当然，所有这些看法都是正确的，因为“小波”是一种具有非常丰富的数学内容，且对应用有巨大潜力的多方面适用的工具。然而，像这样的学科仍在迅速的发展之中，还不能过早地给出一个明确而统一的描述。本书的目标是适度的：打算把它作为关于“小波分析”方面的一本导论性著作。这本书既是为大学高年级学选修课或开始学习研究生课程的数学与工科各学科的学生写的，也是为希望学习这个学科内容的数学家与工程师写的。对于专家们来说，本卷书可作为更进一步的专著的补充读物，这些专著如，Yves Meyer 著的两卷本：Ondelettes et Opérateurs；作者主编的本系列丛书之一：Wavelets——A Tutorial in Theory and Applications；Ingrid Daubechies 著的即将出版的 CBMS 讲座：Ten Lectures on Wavelets。

因为小波分析是一个比较新的课题和方法，而本书的编排体系与其它的书有些不同，所以本章的目的是要概括小波分析的一般思想和描述本书所要包括的内容。

1.1 Fourier 分析到小波分析

令 $L^2(0,2\pi)$表示在区间$(0,2\pi)$上定义的所有可测且具有

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$$

的函数集合。对于不熟悉 Lebesgue 基础理论的读者，假设 f 是一个分段连续函数，可使学习所受影响最小。以后总是假定，$L^2(0,2\pi)$中的函数周期地延拓到实直线

$$\mathbb{R} := (-\infty,\infty)$$

即：$f(x)=f(x-2\pi)$对所有 x 成立。因此，集合 $L^2(0,2\pi)$常称为 2π 周期的平方可积函数空间。很容易验证，$L^2(0,2\pi)$是一个向量空间。$L^2(0,2\pi)$中的任何一个 f 都具有一个 Fourier 级数表示式

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{1.1.1}$$

其中常数 c_n 定义为

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \tag{1.1.2}$$

它称为 f 的 Fourier 系数。在公式(1.1.1)中，级数的收敛是在 $L^2(0,2\pi)$中，意思是

$$\lim_{M,N\to\infty}\int_0^{2\pi}\left|f(x) - \sum_{n=-M}^{N} c_n e^{inx}\right|^2 dx = 0$$

在 Fourier 级数表示公式(1.1.1)中，有两个独特的性质：首先，f 可分解为无限多个互相正交分量 $g_n(x) := c_n e^{inx}$ 的一个和，其中正交是指

$$< g_m, g_n > = 0, \quad 对所有\ m \neq n \qquad (1.1.3)$$

而公式(1.1.3)中的"内积"定义为

$$< g_m, g_n > := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_m(x)\overline{g_n(x)}dx \qquad (1.1.4)$$

公式(1.1.3)成立是一个重要的结论,然而简单的事实

$$w_n(x) := e^{inx}, \quad n = \cdots, -1, 0, 1, \cdots \qquad (1.1.5)$$

是 $L^2(0,2\pi)$的一个正交基。Fourier 级数表示公式(1.1.1)的第二个独特的性质是,正交基$\{w_n\}$可用一个单个函数

$$w(x) := e^{ix} \qquad (1.1.6)$$

的"膨胀"生成。也就是说,对所有的整数 n, $w_n(x) = w(nx)$,这种膨胀称为整数膨胀。我们概括一下这个值得注意的事实:每个 2π 周期平方可积函数都可用基函数 $w(x) = e^{ix}$ 的整数膨胀的"叠加"来生成。

我们还注意到,由$\{w_n\}$的正交性质,Fourier 级数表示公式(1.1.1)也满足所谓的 Parseval 恒等式

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \qquad (1.1.7)$$

令 l^2 表示所有双无限平方可和序列的空间,即$\{c_n\} \in l^2$ 如且仅如

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$$

那么,如果把公式(1.1.7)左边的量的平方根作为对于 $L^2(0,2\pi)$中函数度量的"范数",同样地,把公式(1.1.7)右边的量的平方根作为对于 l^2 的范数,那么函数空间 $L^2(0,2\pi)$与序列空间 l^2 彼此是"同构的"。现在返回到对上述 Fourier 级数表示公式(1.1.1)的观

察，还可以说，每个 2π 周期平方可积函数是基函数 $w(x)=e^{ix}$ 的整数膨胀的一种 l^2 的线性组合。

需要再次强调，基函数

$$w(x)=e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

是一个"正弦波"，它是要求生成所有 2π 周期平方可和函数的单独函数。对于具有大的绝对值的任何整数 n，波 $w_n(x)=w(nx)$ 有高的"频率"，而对于具有小的绝对值的整数 n，波 $w_n(x)$ 具有低的频率。所以，在 $L^2(0,2\pi)$ 中的每个函数由具有各种频率的波组成。

下面考虑定义在实直线 $\mathbb{R}$ 上的可测函数 f 的空间 $L^2(\mathbb{R})$，函数 f 满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx<\infty$$

很明显，两个函数空间 $L^2(0,2\pi)$ 和 $L^2(\mathbb{R})$ 是完全不同的。特别是，因为 $L^2(\mathbb{R})$ 中每个函数（的局部平均值）在 $\pm\infty$ 必须"衰减"到零；所以正弦（波）函数 w_n 不属于 $L^2(\mathbb{R})$。事实上，如果我们寻找产生 $L^2(\mathbb{R})$ 的"波"，那么这个波就在 $\pm\infty$ 衰减到零；并且对于所有的实际应用，衰减应该是很快的。即，我们寻找小的波，或"小波"以生成 $L^2(\mathbb{R})$。像在 $L^2(0,2\pi)$ 中的情况，那里一个单个函数 $w(x)=e^{ix}$ 生成整个空间，我们还希望有一个单个函数 ψ 来生成整个 $L^2(\mathbb{R})$。但是，如果小波 ψ 具有很快的衰减，它怎么能够覆盖整个实直线呢？明显的方法是沿 $\mathbb{R}$ 移动 ψ。

令 $\mathbb{Z}$ 表示整数的集合

$$\mathbb{Z}=\{\cdots,-1,0,1,\cdots\}$$

对于 ψ，覆盖全体 $\mathbb{R}$ 的最简单方法是考虑 ψ 的所有整数平移，即

$$\psi(x-k),\qquad k\in\mathbb{Z}$$

像在正弦波情形那样，下面还必须考虑具有不同频率的波。由于种

种原因，读者马上就会清楚，我们不希望考虑“单频率”的波，而宁愿考虑频率划分为连续“倍频程”(或频带)的波。为了计算的有效性，我们对于频率划分将使用 2 的整数幂；也就是说，我们现在考虑小波

$$\psi(2^j x - k) \qquad j,k \in \mathbb{Z} \tag{1.1.8}$$

可以看出，$\psi(2^j x-k)$可由一个单个“小波”函数 $\psi(x)$通过一个二进膨胀(即 2^j 的膨胀)和一个($k/2^j$ 的)二进位移得到。

这样，我们就对“小波”的函数 ψ 感兴趣，ψ 的二进膨胀和二进位移足以表示 $L^2(\mathbb{R})$中的所有函数。为了简单，我们首先考虑用 ψ 产生的一个正交基。在本章后面(见 1.4 节)，我们将引入更一般的“小波级数”。

在整个这本书中，我们使用下述记号表示空间 $L^2(\mathbb{R})$的内积与范数

$$<f,g> := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx \tag{1.1.9}$$

$$\| f \|_2 := <f,f>^{1/2} \tag{1.1.10}$$

其中 $f,g \in L^2(\mathbb{R})$。注意，对于任何 $j,k \in \mathbb{Z}$，有

$$\| f(2^j \cdot - k) \|_2 = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(2^j x - k)|^2 dx \right\}^{1/2} = 2^{-j/2} \| f \|_2$$

因此，如果一个函数 $\psi \in L^2(\mathbb{R})$具有单位长度，那么，用

$$\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\psi(2^j x - k) \qquad j,k \in \mathbb{Z} \tag{1.1.11}$$

定义的所有函数 $\psi_{j,k}(x)$也具有单位长度，即

$$\| \psi_{j,k} \|_2 = \| \psi \|_2 = 1, \quad j,k \in \mathbb{Z} \tag{1.1.12}$$

在本书中，定义在 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 上的 Kronecker 符号

$$\delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & 对\ j = k \\ 0 & 对\ j \neq k \end{cases} \tag{1.1.13}$$

经常使用。

定义 1.1 一个函数 $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ 称为是一个正交小波，如果公式(1.1.11)中所定义的族 $\{\psi_{j,k}\}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个规范正交基，即

$$<\psi_{j,k}, \psi_{l,m}> = \delta_{j,l} \cdot \delta_{k,m}, \quad j,k,l,m \in \mathbb{Z} \tag{1.1.14}$$

而且每个 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 能写成

$$f(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \psi_{j,k}(x) \tag{1.1.15}$$

其中公式(1.1.15)中的级数收敛是在 $L^2(\mathbb{R})$ 中的收敛，即

$$\lim_{M_1,N_1,M_2,N_2 \to \infty} \| f - \sum_{j=-M_2}^{N_2} \sum_{k=-M_1}^{N_1} c_{j,k} \psi_{j,k} \|_2 = 0$$

正交小波的最简单例子是用

$$\psi_H(x) := \begin{cases} 1 & 对\ 0 \leqslant x < 1/2 \\ -1 & 对\ 1/2 \leqslant x < 1 \\ 0 & 其它 \end{cases} \tag{1.1.16}$$

定义的 Haar 函数。在 1.5 和 1.6 节中，我们将给出这个函数一个简洁的讨论。其它的正交小波将在第七章中详细研究。

公式(1.1.15)中 f 的级数表示称为小波级数。类似于在公式(1.1.2)中 Fourier 系数概念，小波系数 $c_{j,k}$ 由

$$c_{j,k} = <f, \psi_{j,k}> \tag{1.1.17}$$

给出。即，如果我们定义在 $L^2(\mathbb{R})$ 上的一个积分变换 W_ψ 为

$$(W_\psi f)(b,a) := |a|^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)}dx$$

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \qquad (1.1.18)$$

那么，公式(1.1.15)和(1.1.17)中的小波系数就变成

$$c_{j,k} = (W_\psi f)\left(\frac{k}{2^j},\frac{1}{2^j}\right) \qquad (1.1.19)$$

线性变换 W_ψ 称为关于"基小波"ψ 的"积分小波变换"。因此，f 的第(j,k)个小波系数由 f 的积分小波变换在具有二进膨胀 $a=2^{-j}$ 的二进位置 $b=k/2^j$ 计算给出，其中相同的正交小波 ψ 常用来生成小波级数公式(1.1.15)和定义积分小波变换公式(1.1.18)。

积分小波变换的重要性在下节中讨论。在这里，我们只说明，这个积分变换大大地增强了(积分)Fourier 变换 $\mathscr{F}$ 的价值，$\mathscr{F}$ 可定义为

$$(\mathscr{F}f)(y) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyx} f(x)dx, f \in L^2(\mathbb{R}) \qquad (1.1.20)$$

这个变换的数学描述在下章进行。众所周知，Fourier 变换是 Fourier 分析的一个重要组成部分。因此，注意 Fourier 分析的两个组成部分是有意义的，即：Fourier 级数与 Fourier 变换，它们基本上是不相关的；而小波分析的两个相应的组成部分，即：小波级数公式(1.1.15)与积分小波变换公式(1.1.18)，具有如公式(1.1.19)所描述的密切的关系。

1.2 积分小波变换和时间-频率分析

公式(1.1.20)所定义的 Fourier 变换 $\mathscr{F}$ 不只是一个很有力的数学工具，而且在应用中还具有重要的物理解释。例如，如果一个函数 $f\in L^2(\mathbb{R})$ 被看作是由它的范数 $\|f\|_2$ 定义的具有有限能量的一个模拟信号，那么 f 的 Fourier 变换

$$\hat{f}(\omega) := (\mathscr{F} f)(\omega) \tag{1.2.1}$$

表示这个信号的频谱。在信号分析中，模拟信号在时域中确定，而这些信号的频谱信息在频域中给出。为了便于表示，我们暂时允许有负的频率。因此，无论是时域还是频域都是实直线 $\mathbb{R}$。类似于 Fourier 级数的 Parseval 恒等式，描述在 $L^2(\mathbb{R})$ 中函数与它们的 Fourier 变换之间关系的 Parseval 恒等式用

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}) \tag{1.2.2}$$

给出。在这里，使用了在公式(1.1.9)中引入的内积记号，并且在下章将会看到，Fourier 变换 $\mathscr{F}$ 使 $L^2(\mathbb{R})$ 映射到它本身。作为公式(1.2.2)的一个推论，我们发现，一个模拟信号的能量与它的频谱的含量成正比例，更确切地说

$$\| f \|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \| \hat{f} \|_2 \qquad f \in L^2(\mathbb{R}) \tag{1.2.3}$$

然而，只有 Fourier 变换公式

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\omega} f(t) dt \tag{1.2.4}$$

对于大多数应用来说是很不够的。首先，为了用这个公式从模拟信号 $f(t)$ 中提取频谱信息 $\hat{f}(\omega)$，就要取无限的时间量，使用过去的和将来的信号信息只为计算单个频率 ω 的频谱。此外，公式(1.2.4)甚至没有反映出随时间变化的频率。实际上需要的是，人们怎样能够确定时间间隔，使在任何希望的频率范围（或频带）上产生频谱信息。另外，因为一个信号的频率与它的周期长度成正比，由此得到，对于高频谱的信息，时间间隔要相对地小以给出比较好的精度；对于低频谱的信息，时间间隔要相对地宽以给出完全的信息。换句话说，重要的是要有一个灵活可变的时间-频率窗，使

在高“中心频率”时自动变窄，而在低中心频率时自动变宽。幸好，公式(1.1.18)中引入的关于某个“基小波”ψ的积分小波变换具有这个所谓的移近和远离的伸缩能力。

更具体地说，ψ及其 Fourier 变换$\hat{\psi}$都必须有足够快的衰减，这样他们就能作为“窗函数”。为使$L^2(\mathbb{R})$的函数w能作为一个窗函数，它必须能确定如下定义的“中心”与“宽度”。

定义 1.2 非平凡函数$w\in L^2(\mathbb{R})$称为一个窗函数，如果$xw(x)$也是属于$L^2(\mathbb{R})$的。一个窗函数w的中心t^*与半径Δ_w定义分别是：

$$t^* := \frac{1}{\|w\|_2^2}\int_{-\infty}^{\infty} x|w(x)|^2 dx \tag{1.2.5}$$

$$\Delta_w := \frac{1}{\|w\|_2^2}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(x - t^*)^2|w(x)|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{1.2.6}$$

而窗函数w的宽度由$2\Delta_w$确定。

我们现在还没有从形式上定义一个“基小波”ψ，而且在下节也不做这件事。基本小波的一个例子是像在前节已经讨论的任一正交小波。在任何情况下，我们都会看到，任一基小波窗函数必须满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)dx = 0 \tag{1.2.7}$$

这样，它的图形是一个小的波。

假定ψ是任一基本小波使ψ及其 Fourier 变换都是分别用$t^*,\omega^*,\Delta_\psi,\Delta_{\hat{\psi}}$给出中心与半径的窗函数。那么，首先很显然的是公式(1.1.18)引入的一个模拟信号的积分小波变换

$$(W_\psi f)(b,a) = |a|^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}dt \tag{1.2.8}$$

把信号限制在"时间窗"的范围内，即

$$[b+at^*-a\Delta_\psi, b+at^*+a\Delta_\psi]$$

其中窗的中心在 $b+at^*$，而窗的宽度由 $2a\Delta_\psi$ 给出。在信号分析中，这称为"时间局部化"。其次，如果我们设

$$\eta(\omega):=\hat{\psi}(\omega+\omega^*) \tag{1.2.9}$$

那么 η 还是一个具有中心在 0 且半径由 $\Delta_{\hat{\psi}}$ 给出的窗函数，并且根据 Parseval 恒等式(1.2.2)、公式(1.2.8)中的积分小波变换成为

$$(W_\psi f)(b,a)=\frac{a|a|^{-\frac{1}{2}}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{ib\omega}\overline{\eta(a(\omega-\frac{\omega^*}{a}))}d\omega \tag{1.2.10}$$

因此，除了倍数 $a|a|^{-\frac{1}{2}}/2\pi$ 和用时间窗的位移量决定的一个线性相位位移 $e^{ib\omega}$ 之外，同样的量 $(W_\psi f)(b,a)$ 还给出了具有一个"频率窗"

$$[\frac{\omega^*}{a}-\frac{1}{a}\Delta_{\hat{\psi}}, \quad \frac{\omega^*}{a}+\frac{1}{a}\Delta_{\hat{\psi}}]$$

的信号 $f(t)$ 的频谱 $\hat{f}(\omega)$ 的局部信息，这个窗的中心在 ω^*/a 而宽用 $2\Delta_{\hat{\psi}}/a$ 给出，这称为"频率局部化"。使公式(1.2.8)与(1.2.10)相等，对于使用关于基小波 ψ 而窗条件如上描述的积分小波变换的时间-频率分析，则有一个"时间-频率窗"

$$[b+at^*-a\Delta_\psi, b+at^*+a\Delta_\psi] \times [\frac{\omega^*}{a}-\frac{1}{a}\Delta_{\hat{\psi}}, \frac{\omega^*}{a}+\frac{1}{a}\Delta_{\hat{\psi}}] \tag{1.2.11}$$

几点说明是必要的：首先，因为最终必须考虑正频率，基小波 ψ 应该选取使 $\hat{\psi}$ 的中心 ω^* 是一个正数。实际上，这个正数与正尺

度参数 a 一道以这样一种方式选择：ω^*/a 是所研究的“频带” $[\frac{\omega^*}{a}-\frac{1}{a}\Delta_{\hat{\psi}},\frac{\omega^*}{a}+\frac{1}{a}\Delta_{\hat{\psi}}]$的“中心频率”。于是，中心频率与频带宽之比为

$$\frac{\frac{\omega^*}{a}}{\frac{2\Delta_{\hat{\psi}}}{a}}=\frac{\omega^*}{2\Delta_{\hat{\psi}}} \tag{1.2.12}$$

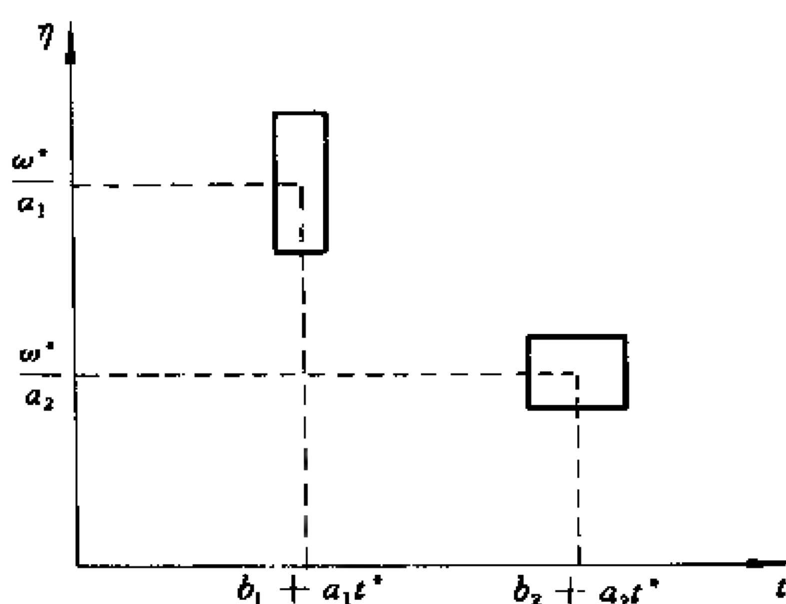


图 1.2.1 时间-频率窗，$a_1<a_2$

它是与中心频率的位置无关的。这称为“常数 Q”频率分析。时间频率窗公式(1.2.11)的重要性是，对于大的中心频率 ω^*/a，窗变窄；对于小的中心频率 ω^*/a，窗变宽(参看图 1.2.1)，虽然窗的面积是用 $4\Delta_\psi\Delta_{\hat{\psi}}$ 给出的常数。这正是在时间-频率分析中最希望的。详细情况在第三章中研究。

1.3 反演公式和对偶

积分小波变换$(W_\psi f)(b,a)$给出了 f 变化位置(用 $b+at^*$)，“速

率"(用 a)和量(用$(W_\psi f)(b,a)$的值度量),而且具有伸缩的能力。这个信息在时间-频率分析的许多应用中是极有价值的。例如,在数据压缩中,$(W_\psi f)(b,a)$的值在某个容许的电平下移动,而且在低通滤波器中,对于小的 a 值,$(W_\psi f)(b,a)$用零代替。在任何情况,(新的和修改过的)函数 f 必须由$(W_\psi f)(a,b)$的值重构。用$(W_\psi f)(a,b)$表示每个 $f\in L^2(\mathbb{R})$的任何一个公式都称为是一个"反演公式",并且在这个公式中使用的(核)函数 $\tilde{\psi}$ 称为基小波 ψ 的一个"对偶"。因此,在实践中,只要反演公式存在,ψ 就可作为一个基小波。

下面,我们按照 $W_\psi f$ 信息域的限制次序来研究四种不同情况。

(1°) **由$(W_\psi f)(a,b)$,$a,b\in\mathbb{R}$,重新复原**

为了由 $W_\psi f$ 重构 f,我们需要知道常数

$$C_\psi := \int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}d\omega < \infty \qquad (1.3.1)$$

这个常数的有限性限制了在积分小波变换的定义中能够作为"基小波"的 $L^2(\mathbb{R})$函数 ψ 的类。特别是,如果 ψ 必须也是一个窗函数,那么 ψ 必须属于 $L^1(\mathbb{R})$,即

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|dx < \infty$$

所以 $\hat{\psi}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个连续函数(见第二章定理 2.2),因此,由公式(1.3.1)得到 $\hat{\psi}$ 在原点必定为零,即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)dx = 0 \qquad (1.3.2)$$

这样,一个基小波 ψ 的图象是一个小的波。包括常数 C_ψ 在内,我们有下述重构公式

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi}\iint_{\mathbb{R}^2} \{(W_\psi f)(b,a)\}\left\{|a|^{-\frac{1}{2}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right\}\frac{dadb}{a^2}$$

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \tag{1.3.3}$$

其中 $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$。注意，同样的核

$$|a|^{-\frac{1}{2}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

除了复共轭外，常用于确定公式(1.1.18)中的积分小波变换和公式(1.3.3)中的逆。因此，$\tilde{\psi}$ 可以称为是基小波 ψ 的一个"对偶"。当然，我们不能期望这个对偶的唯一性。

(2°) 由 $(W_\psi f)(a,b)$，$b\in\mathbb{R}$ 和 $a>0$，重新复原

像前节讨论的时间-频率分析那样，我们使用 a^{-1} 的正常数倍表示频率。因此，因为只有正的频率是有意义的，我们需要一个重构公式，其中积分是在 $\mathbb{R}\times(0,\infty)$，而不是在 $\mathbb{R}^2$。所以，我们现在必须考虑基小波 ψ 一个比较小的类，即小波 ψ 满足

$$\int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega}d\omega = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega}d\omega$$

$$= \frac{1}{2}C_\psi < \infty \tag{1.3.4}$$

其中 C_ψ 已在公式(1.3.1)中定义。例如，任一满足公式(1.3.1)的实值 ψ 能够作为在此情况下的一个基小波。对于任一满足公式(1.3.4)的 ψ，有下述重构公式

$$f(x) = \frac{2}{C_\psi}\int_0^\infty\left[\int_{-\infty}^\infty\{(W_\psi f)(b,a)\}\left\{\frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right\}db\right]\frac{da}{a^2}$$

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \tag{1.3.5}$$

除了一个因子 2 以外，这个公式与重构公式(1.3.3)相同。当然，公式(1.3.5)中的基小波有更多限制。像在(1°)中，我们还是称 ψ

的复共轭 $\overline{\psi}$ 为情形(2°)时基小波 ψ 的一个"对偶"。可见没有理由期望有一个唯一对偶。

(3°) **由$(W_\psi f)(b,a),b\in\mathbb{R},a=\frac{1}{2^j},j\in\mathbb{Z}$,重新复原**

把注意力集中于 $a=2^{-j}$,其中 j 取遍所有整数,我们就能够研究频率窗

$$B_j := [2^j\omega^* - 2^j\Delta_{\hat{\psi}}, 2^j\omega^* + 2^j\Delta_{\hat{\psi}}], \quad j\in\mathbb{Z} \tag{1.3.6}$$

的时间-频率局部化。特别是,如果窗函数 $\hat{\psi}$ 的中心 ω^* 选作

$$\omega^* = 3\Delta_{\hat{\psi}}$$

那么公式(1.3.6)中的频带 $B_j,j\in\mathbb{Z}$,形成整个频率轴$[0,\infty)$的一个不相交的划分,除了区间 B_j 的两端点外。积分小波变换公式(1.2.8)常用于确定时间区间$[b+2^{-j}t^*-2^{-j}\Delta_\psi,b+2^{-j}t^*+2^{-j}\Delta_\psi]$,在这个区间上,值域 B_j 中的频率的信号 f 的频谱的含量是至关重要的,即$|(W_\psi f)(b,2^{-j})|$的值超过某一阈值。

因为只有 $W_\psi f$ 的部分信息是有用的,欲使重构公式有效,基小波 ψ 必须再次满足比公式(1.3.1)更强的条件。我们施加给 ψ 的条件是下述所谓的"稳定性条件",

$$A\leqslant\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2\leqslant B \tag{1.3.7}$$

其中 A 与 B,$0<A\leqslant B<\infty$,是与 ω 无关的常数。由公式(1.3.7)很容易得到,ψ 还满足

$$A\ \ln 2\leqslant\int_0^\infty\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega}d\omega,\int_0^\infty\frac{|\hat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega}d\omega \leqslant B\ \ln 2 \tag{1.3.8}$$

这是指 C_ψ 位于 $2A\ln 2$ 与 $2B\ln 2$ 之间。第三章 3.4 节将详细讨论。

如果 $\hat{\psi}$ 满足公式(1.3.7)，那么基小波 ψ 具有一个"对偶"ψ^*，这个 ψ^* 的 Fourier 变换用

$$\hat{\psi}^*(\omega) := \frac{\overline{\hat{\psi}(\omega)}}{\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2} \tag{1.3.9}$$

给出。使用这个对偶的重构公式可以表示如下：

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{2^{j/2}(W_\psi f)(b, 2^{-j})\} \times \{2^j \psi^*(2^j(x-b))\} db \tag{1.3.10}$$

$$f \in L^2(\mathbb{R})$$

因为基小波对这种情况既有理论价值又有实用价值，所以赋予下述专用名称。

定义 1.3 一个函数 $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ 称为是一个"二进小波"，如果对于有 $0 < A \leqslant B < \infty$ 的某些常数 A 与 B 及几乎所有 $\omega \in \mathbb{R}$，它满足稳定性条件公式(1.3.7)。

将在第三章中看到，甚至二进小波一般也不具有唯一对偶。二进小波最有意义的一些例子也许是在 3.5 节中引入的所谓"框架"。

(4°) **由** $(W_\psi f)(b, a)$，$b = \frac{k}{2^j}$，$a = \frac{1}{2^j}$；$j, k \in \mathbb{Z}$，**复原。**

对于确定积分小波变换和由 $(W_\psi f)(b, a)$ 重构 f，为了建立有效算法，我们只考虑离散抽样。当说到像在(3°)中那样，虽然尺度参数 a 使用 2 的幂把频率轴剖分为频带是重要的，但更加有效的是，当 $a = 2^{-j}$，$j \in \mathbb{Z}$ 时，只考虑在时间轴上的二进值 $b = k/2^j$ 而不是所有 $b \in \mathbb{R}$。在许多应用中，使用这个均匀离散抽样，有很小的损失（若有的话），像在后面将看到的，这种方法的数学理论是很有吸引力的。

我们首先注意

$$(W_\psi f)(\frac{k}{2^j},\frac{1}{2^j}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{\{2^{j/2}\psi(2^jx-k)\}}dx$$

$$= \langle f,\psi_{j,k}\rangle \qquad (1.3.11)$$

其中,像在公式(1.1.11)中

$$\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\psi(2^jx-k), \quad j,k\in\mathbb{Z} \qquad (1.3.12)$$

然而,一般来说,我们并不要求$\{\psi_{j,k}\}$像在 1.1 节中那样是 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个正交基。事实上,如下述定义的一个"稳定"基就足够了。

定义 1.4 一个函数 $\psi\in L^2(\mathbb{R})$称为是一个 $\mathscr{R}$ 函数,如果公式(1.3.12)中定义的$\{\psi_{j,k}\}$在下述意义上是 $L^2(\mathbb{R})$的一个 Riesz 基。$\psi_{j,k}$, $j,k\in\mathbb{Z}$,的线性张成在 $L^2(\mathbb{R})$中是稠密的并且存在正常数 A 与 B, $0<A\leqslant B<\infty$,使

$$A\|\{c_{j,k}\}\|_{l^2}^2 \leqslant \|\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_{j,k}\psi_{j,k}\|_2^2$$

$$\leqslant B\|\{c_{j,k}\}\|_{l^2}^2 \qquad (1.3.13)$$

对于所有二重双无限平方可和序列$\{c_{j,k}\}$成立,即对于

$$\|\{c_{j,k}\}\|_{l^2}^2 := \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_{j,k}|^2<\infty$$

的$\{c_{j,k}\}$成立。

假定 ψ 是一个 $\mathscr{R}$ 函数,那么存在 $L^2(\mathbb{R})$的一个唯一的 Riesz 基$\{\psi^{j,k}\}$,它是在意义

$$\langle\psi_{j,k},\psi^{l,m}\rangle = \delta_{j,l}\,\delta_{k,m} \quad j,k,l,m\in\mathbb{Z} \qquad (1.3.14)$$

上对于$\{\psi_{j,k}\}$的对偶。因此,每个函数 $f\in L^2(\mathbb{R})$具有下述(唯一)级数表示:

$$f(x)=\sum_{j,k=-\infty}^{\infty}<f,\psi_{j,k}>\psi^{j,k}(x) \qquad (1.3.15)$$

然而，虽然系数是 f 关于 ψ 的积分小波变换的值，但级数公式(1.3.15)不一定是一个小波级数。作为一个合格的小波级数，必须存在某个函数 $\tilde{\psi}\in L^2(\mathrm{IR})$，使在级数公式(1.3.15)中的对偶基 $\{\psi^{j,k}\}$ 是由 $\tilde{\psi}$ 通过

$$\psi^{j,k}(x)=\tilde{\psi}_{j,k}(x) \qquad (1.3.16)$$

得到。像通常那样，式中使用了记号

$$\tilde{\psi}_{j,k}(x):=2^{j/2}\tilde{\psi}(2^jx-k) \qquad (1.3.17)$$

如果 $\{\psi_{j,k}\}$ 是 $L^2(\mathrm{IR})$ 的一个正交基，像已经在公式(1.1.14)，(1.1.15)，(1.1.17)中讨论了的，显然公式(1.3.14)对于 $\psi^{j,k}=\psi_{j,k}$ 或 $\tilde{\psi}=\psi$ 成立。然而，像我们将在下节看到的，通常 $\tilde{\psi}$ 不存在。如果 ψ 选择得使 $\tilde{\psi}$ 存在，那么，对于在二进位置和不同的二进尺度等级(或倍频程)上显示 $f\in L^2(\mathrm{IR})$ 的积分小波变换的值，以及对于由它的积分小波变换的这些值复原 f，一对 $(\psi,\tilde{\psi})$ 都是很有用的。更确切地说，我们有

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{j,k=-\infty}^{\infty}<f,\psi_{j,k}>\tilde{\psi}_{j,k}(x)\\&=\sum_{j,k=-\infty}^{\infty}<f,\tilde{\psi}_{j,k}>\psi_{j,k}(x)\end{aligned} \qquad (1.3.18)$$

1.4 小波的分类

令 $\psi\in L^2(\mathrm{IR})$ 是一个 $\mathscr{R}$ 函数；即，公式(1.3.12)中定义的 $\{\psi_{j,k}\}$ 是 $L^2(\mathrm{IR})$ 的一个 Riesz 基。我们面临的第一个问题是，如在公式(1.3.14)中定义的关于 $\{\psi_{j,k}\}$ 的对偶基 $\{\psi^{j,k}\}$，是否由公式(1.3.16)～(1.3.17)某个函数 $\tilde{\psi}\in L^2(\mathrm{IR})$ 导出的。出乎预料的是，

一般来说答案是否定的。

例如，令 $\eta \in L^2(\mathrm{IR})$ 是在定义 1.1 中引入的任一正交小波。对于每个具有 $|z|<1$ 的复数 z，考虑函数

$$\psi(x) := \psi_z(x) := \eta(x) - \bar{z}\sqrt{2}\,\eta(2x) \qquad (1.4.1)$$

那么很明显，公式(1.3.12)中定义的族 $\{\psi_{j,k}\}$ 是 $L^2(\mathrm{IR})$ 的一个 Riesz 基。现在，我们考虑关于 $\{\psi_{j,k}\}$ 的对偶基 $\{\psi^{j,k}\}$。特别是，容易证明：

$$\begin{cases} \psi^{0,0}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \eta_{-l,0}(x)\, z^l \\ \psi^{0,1}(x) = \eta_{0,1}(x) \end{cases} \qquad (1.4.2)$$

如果能够求得某个函数 $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_z \in L^2(\mathrm{IR})$ 使(1.3.16)，(1.3.17)成立，那么有

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \eta_{0,1}(x+1) = \psi^{0,1}(x+1) \\ &= \tilde{\psi}_{0,1}(x+1) = \tilde{\psi}_{0,0}(x) \\ &= \psi^{0,0}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \eta_{-l,0}(x)\, z^l \end{aligned}$$

或者

$$\sum_{l=1}^{\infty} \eta_{-l,0}(x)\, z^l = 0$$

因为这是明显荒谬的，除在 $|z|<r$ 中 z 的值至多是有限数个外，其中 $0<r<1$ 是任意的。我们断定 $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_z$ 一般不存在。

上述讨论诱导出“小波”的下述定义。

定义 1.5 一个 $\mathscr{R}$-函数 $\psi \in L^2(\mathrm{IR})$ 称为一个 $\mathscr{R}$-小波(或小波)。如果存在一个函数 $\tilde{\psi} \in L^2(\mathrm{IR})$，使公式(1.3.12)与(1.3.17)中定义

的$\{\psi_{j,k}\}$与$\{\tilde{\psi}_{j,k}\}$是$L^2(\mathbb{R})$的对偶基。如果ψ是一个$\mathscr{R}$-小波，那么$\tilde{\psi}$称为是一个相应于ψ的对偶小波。

很明显，一个对偶小波$\tilde{\psi}$是唯一的并且它本身就是一个$\mathscr{R}$-小波。更确切地说，一对$(\psi,\tilde{\psi})$在下述意义上是对称的：ψ也是$\tilde{\psi}$的对偶小波。为了方便，我们简单称ψ是一个"小波"和$\tilde{\psi}$是ψ的"对偶"。正如我们已经在1.3节中注意到的，如果ψ是一个正交小波，那么它在意义$\tilde{\psi}=\psi$上是自对偶的。

重要的是再一次强调，每个小波ψ，正交的或不正交的，生成任何$f\in L^2(\mathbb{R})$的一个"小波级数"表示，即：

$$f(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{j,k}\psi_{j,k}(x)$$

其中每个$c_{j,k}$都是关于ψ的对偶$\tilde{\psi}$的f的积分小波变换在时间-尺度的坐标

$$(b,a) = (\frac{k}{2^j},\frac{1}{2^j})$$

上求得。

令ψ是任一小波并且考虑它生成的Riesz基$\{\psi_{j,k}\}$。对于每个$j\in\mathbb{Z}$，令W_j表示$\{\psi_{j,k}: k\in\mathbb{Z}\}$的线性张成的闭包，即

$$W_j := \mathrm{clos}_{L^2(\mathbb{R})} < \psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z} > \qquad (1.4.3)$$

那么很明显，$L^2(\mathbb{R})$能够分解为空间W_j的直接和：

$$L^2(\mathbb{R}) = \dot{\sum_{j\in\mathbb{Z}}} W_j := \cdots \dot{+} W_{-1} \dot{+} W_0 \dot{+} W_1 \dot{+} \cdots \qquad (1.4.4)$$

在这个意义上，每个$f\in L^2(\mathbb{R})$都有一个唯一的分解

$$f(x)=\cdots+g_{-1}(x)+g_0(x)+g_1(x)+\cdots \qquad (1.4.5)$$

其中 $g_j \in W_j$ 对于所有 $j \in \mathbb{Z}$ 成立。公式(1.4.4)中求和与加号上的黑点表示"直接和"。

如果 ψ 是一个正交小波,那么 $L^2(\mathbb{R})$ 的子空间 W_j 相互是正交的,即

$$\langle g_j, g_l \rangle = 0, \quad j \neq l \tag{1.4.6}$$

其中 $\quad g_j \in W_j \quad$ 与 $\quad g_l \in W_l$

在此情况下,我们使用记号

$$W_j \perp W_l, \quad j \neq l \tag{1.4.7}$$

结果,公式(1.4.4)中的直接和变成了正交和:

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j := \cdots \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \cdots \tag{1.4.8}$$

其中公式(1.4.8)中围绕加号的圆圈表示"正交和"。公式(1.4.8)的分解通常称为 $L^2(\mathbb{R})$ 的一种正交分解。这个意思是,任一 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 分解为函数 $g_j \in W_j$ 的(无限)和不仅是唯一的,而且像公式(1.4.6)所描述的 f 的分量还是相互正交的。

所以,一个正交小波 ψ 产生 $L^2(\mathbb{R})$ 的一种正交分解。然而,我们没有使用 $\{\psi_{j,k}\}$ 的所有正交性质,即,对于每个 j,正交性条件 $\langle \psi_{j,k}, \psi_{j,l} \rangle = \delta_{k,l}$ 在公式(1.4.8)中没有反映。这意味着,有一大类小波能够用于生成 $L^2(\mathbb{R})$ 的正交分解。这种可用的灵活性对于构造具有某些需要性质的小波是重要的。对于具有这个灵活性的紧支撑小波,人们能够得到的最重要的性质是"对称"或"反对称"。细节问题将在第 5,6 章中研究。

定义 1.6 一个在 $L^2(\mathbb{R})$ 中的小波 ψ 称为是一个半正交小波,如果它生成满足

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = 0, \quad j \neq l; j, k, l, m \in \mathbb{Z} \tag{1.4.9}$$

的 Riesz 基。

显然，每一个半正交小波生成 $L^2(\mathbb{R})$ 的一种正交分解公式 (1.4.8)，并且每个正交小波还是一个半正交小波。一个小波（或者更确切地说，一个 $\mathscr{R}$ 小波）ψ 称为是一个非正交小波——如果它不是一个半正交小波。然而，既然是一个 $\mathscr{R}$-小波，它就具有一个对偶 $\tilde{\psi}$，并且一对 $(\psi,\tilde{\psi})$ 满足双正交性质：

$$<\psi_{j,k},\tilde{\psi}_{l,m}>=\delta_{j,l}\cdot\delta_{k,m},\quad j,k,l,m\in\mathbb{Z}\qquad(1.4.10)$$

1.5 多分辨分析、样条及小波

任何小波，半正交的或非正交的，都产生 $L^2(\mathbb{R})$ 的一种直接和分解公式(1.4.4)。对于每个 $j\in\mathbb{Z}$，我们考虑 $L^2(\mathbb{R})$ 的闭子空间

$$V_j=\cdots\dot{+}W_{j-2}\dot{+}W_{j-1},\quad j\in\mathbb{Z}\qquad(1.5.1)$$

这些子空间明显具有下述性质：

(1°) $\cdots\subset V_{-1}\subset V_0\subset V_1\subset\cdots$

(2°) $\mathrm{clos}_{L^2}(\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}V_j)=L^2(\mathbb{R})$

(3°) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}}V_j=\{0\}$

(4°) $V_{j+1}=V_j\dot{+}W_j,\quad j\in\mathbb{Z}$

(5°) $f\in V_j\Leftrightarrow f(2x)\in V_{j+1},\quad j\in\mathbb{Z}$

因此，与满足

$$W_j\cap W_l=\{0\},\quad j\neq l$$

的子空间 W_j 大不相同。像(1°)描述的那样，子空间 V_j 的序列是嵌套的，并且具有性质：像在(2°)中描述的，$L^2(\mathbb{R})$ 中的每个函数 f 能够用它在 V_j 中的投影 P_jf 非常接近希望的逼近。但另一方面，像在(3°)中所保证的，通过减小 j，投影 P_jf 能够具有任意小的能量。(1°)～(3°)没有描述的这些空间最重要的内蕴性质是当

$j \to -\infty$时，$P_j f$ 更大的"变化"被除去。事实上，这些变化是逐层剥离，即按变化"速率"（最好称为"频带"）减小顺序剥离，并且存放在像（4°）的补子空间 W_j 中。这个过程能够使用性质（5°）非常有效地做到。

事实上，如果参考子空间 V_0 用单个函数$\phi \in L^2(\mathbb{R})$在意义

$$V_0 = \mathrm{clos}_{L^2(\mathbb{R})} < \phi_{0,k} : k \in \mathbb{Z} > \qquad (1.5.2)$$

上生成，其中

$$\phi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\phi(2^j x - k) \qquad (1.5.3)$$

那么，所有的子空间 V_j 也用同一个ϕ生成（正像子空间 W_j 在公式(1.4.3)中用 ψ 生成一样），即：

$$V_j = \mathrm{clos}_{L^2(\mathbb{R})} < \phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z} >, \quad j \in \mathbb{Z} \qquad (1.5.4)$$

因此，由 V_j 到 $W_{j-1}, W_{j-2}, \cdots, W_{j-l}$ 的剥离过程能够有效地完成。在下节，我们转到这个题目。

定义 1.7 一个函数$\phi \in L^2(\mathbb{R})$被认为生成一个多分辨分析(MRA)，如果它生成在公式(1.5.4)意义上满足(1°)，(2°)，(3°)和(5°)的闭子空间 V_j 的一个嵌套序列，使$\{\phi_{0,k}\}$形成 V_0 的一组 Riesz 基。这里，类似于定理 1.4，$\{\phi_{0,k}\}$是 V_0 的一个 Riesz 基，必须存在两个常数 A 与 B，且 $0<A\leqslant B<\infty$，使

$$A\|\{c_k\}\|_{l^2}^2 \leqslant \left\|\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi_{0,k}\right\|_2^2 \leqslant B\|\{c_k\}\|_{l^2}^2 \qquad (1.5.5)$$

对于所有双无限平方可和序列$\{c_k\}$，即：

$$\|\{c_k\}\|_{l^2}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty \qquad (1.5.6)$$

成立。如果ϕ生成一个 MRA，那么ϕ称为是一个"尺度函数"。

一个 MRA 的精确陈述将在 5.1 节中给出。尺度函数ϕ的典型例子是 m 阶基数 B-样条 N_m，其中 m 是一个任意的正整数。更确切地说，一阶基数 B-样条 N_1 是单位区间[0,1)的特征函数，而对于 $m\geqslant 2$，N_m 是用（积分）卷积递推定义：

$$N_m(x) := \int_{-\infty}^{\infty} N_{m-1}(x-t)N_1(t)dt$$
$$= \int_0^1 N_{m-1}(x-t)dt \qquad (1.5.7)$$

为了描述 N_m 生成空间 V_0，我们需要下述记号：

$$\begin{cases} \pi_n \text{ 表示至多 } n \text{ 次的所有多项式的集合} \\ C^n \text{ 表示使 } f, f^1, \cdots, f^{(n)} \text{ 处处连续} \\ \quad \text{的所有函数 } f \text{ 的集合。还有 } C = C^0 \end{cases} \qquad (1.5.8)$$

用 N_m 生成的 V_0 由这样的函数 f 组成：所有函数 $f\in C^{m-2}\cap L^2(\mathbb{R})$，且每个函数 f 限制任一区间$[k,k+1)$，$k\in\mathbb{Z}$，属于 π_{m-1}，也就是

$$f|_{[k,k+1)} \in \pi_{m-1}, \quad k\in\mathbb{Z}$$

由 MRA 的性质(5°)，我们现在能够识别所有的其它子空间 V_j，即：

$$V_j = \{f\in C^{m-2}\cap L^2(\mathbb{R}) : f|_{[\frac{k}{2^j},\frac{k+1}{2^j})} \in \pi_{m-1}, k\in\mathbb{Z}\}$$

因为样条函数只是逐段多项式函数，所以很容易在计算机上实现。事实上，图形显示样条曲线和用 B-网（或 Bernstein-Bezier 系数）精确地计算多项式段的算法是极有效的。另外，因为 B-样条具有最小可能的支撑，所以由任一希望的样条子空间逼近在 $C\cap L^2(\mathbb{R})$ 中函数的局部插值方法也是可用的。所有上述论及的算法能够在实时中实现。细节问题第四章中研究。

由样条子空间 V_j 的嵌套序列，我们有正交补子空间 W_j，即

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad j\in\mathbb{Z} \qquad (1.5.9)$$

这些子空间 W_j 是相互正交的并且是像公式(1.4.7)与(1.4.8)描述的 $L^2(\mathbb{R})$ 的正交被加项。正像 B-样条 N_m 是 $\{V_j\}$ 的最小支撑生成子一样，我们感兴趣的是，求最小支撑 $\psi_m \in W_0$，它生成在公式(1.4.3)意义上相互正交的子空间 W_j，而在公式(1.4.3)中用 $\psi_{m,j,k}$ 代替 $\psi_{j,k}$，其中

$$\psi_{m;j,k}(x) = 2^{j/2}\psi_m(2^j x - k), \quad j,k \in \mathbb{Z} \quad (1.5.10)$$

这些紧支撑函数 ψ_m 将被称为 m 阶"B-小波"。在第六章中，将导出所有 ψ_m 及其对偶 $\tilde{\psi}_m$ 的显式，$m=1,2,\cdots$。或许把 B-样条与 B-小波的"支撑"比较是有意义的。所谓在某个有界区间外边为零的一个连续函数 f 的支撑是指 f 在外面恒等于零的最小闭集。标准的记号 supp$f$。我们将看到，对于所有 $m=1,2,\cdots$

$$\begin{cases} \text{supp } N_m = [0,m] \\ \text{supp } \psi_m = [0,2m-1] \end{cases} \quad (1.5.11)$$

除了具有最小支撑外，B-小波 ψ_m 享有许多另外的重要性质。我们在这里只叙述其中的三条性质。首先，由公式(1.5.9)可见，每个 ψ_m 是一个半正交小波。其次，计算 ψ_m 和所有它的导数的有效算法是可得到的。最后，B-小波 ψ_m 对于偶数 m 是对称的而对于奇数 m 是反对称的，即

$$\begin{cases} \psi_m(x) = \psi_m(2m-1-x), & \text{对偶数 } m \\ \psi_m(x) = -\psi_m(2m-1-x), & \text{对奇数 } m \end{cases} \quad (1.5.12)$$

在信号分析的应用中，小波函数的对称性和反对称性是很重要的。例如，在压缩数据的重构中为避免失真，它们是需要的。这将在第五章中讨论。ψ_m 的其它有意义的性质将在第六章中研究。

1.6 小波分解与重构

重新考虑公式(1.5.1)中讨论过的多分辨分析和小波的一般

结构，其中$\{V_j\}$用某个尺度函数$\phi\in L^2(\mathbb{R})$生成而$\{W_j\}$用某个小波$\psi\in L^2(\mathbb{R})$生成。在此情形下，根据性质(2°)，每个$L^2(\mathbb{R})$中的函数f能够对某个$N\in\mathbb{Z}$，用一个$f_N\in V_N$非常接近地逼近。因为$V_j=V_{j-1}\dot{+}W_{j-1}$对于任何$j\in\mathbb{Z}$成立，$f_N$具有唯一的分解：

$$f_N = f_{N-1} + g_{N-1}$$

其中$f_{N-1}\in V_{N-1}$和$g_{N-1}\in W_{N-1}$。重复这个过程，则有

$$f_N = g_{N-1} + g_{N-2} + \cdots + g_{N-M} + f_{N-M} \qquad (1.6.1)$$

其中对于任何j，$f_j\in V_j$和$g_j\in W_j$，并且M选取得使f_{N-M}是充分"模糊的"。公式(1.6.1)中的唯一"分解"称为"小波分解"；并且"模糊"借助于f_{N-M}的"变化"(或者，更确切地说，频率或每单位长周期的数目)来测量。一个不十分有效的"暂停准则"是要求$\|f_{N-M}\|$比某个阈值小。下面，我们讨论把f_N表示为它的分量$g_{N-1},\cdots,g_{N-M}$与f_{N-M}的一种直接和并由这些分量复原f_N的一种算法途径。

因为尺度函数$\phi\in V_0$和小波$\psi\in W_0$都属于V_1，而且V_1是用$\phi_{1,k}(x)=2^{1/2}\phi(2x-k)$，$k\in\mathbb{Z}$生成的，所以存在两个序列$\{p_k\}$与$\{q_k\}\in l^2$使

$$\phi(x) = \sum_k p_k \phi(2x - k) \qquad (1.6.2)$$

$$\psi(x) = \sum_k q_k \phi(2x - k) \qquad (1.6.3)$$

对于所有$x\in\mathbb{R}$成立。公式(1.6.2)与(1.6.3)分别称为尺度函数与小波的"两尺度关系"。另一方面，因为$\phi(2x)$与$\phi(2x-1)$都属于V_1且$V_1=V_0\dot{+}W_0$，所以存在四个l^2序列，表示为$\{a_{-2k}\}$，$\{b_{-2k}\}$，$\{a_{1-2k}\}$与$\{b_{1-2k}\}$，$k\in\mathbb{Z}$，使

$$\phi(2x) = \sum_k [a_{-2k}\phi(x-k) + b_{-2k}\psi(x-k)] \tag{1.6.4}$$

$$\phi(2x-1) = \sum_k [a_{1-2k}\phi(x-k) + b_{1-2k}\psi(x-k)] \tag{1.6.5}$$

对于所有 $x \in \mathbb{R}$ 成立。两个公式(1.6.4)与(1.6.5)能够组合成一个公式：

$$\phi(2x-l) = \sum_k [a_{l-2k}\phi(x-k) + b_{l-2k}\psi(x-k)] \quad l \in \mathbb{Z} \tag{1.6.6}$$

这称为ϕ与 ψ 的"分解关系"。现在，我们有两对序列$(\{p_k\},\{q_k\})$与$(\{a_k\},\{b_k\})$，它们全部是唯一的，这应归于直接和关系$V_1 = V_0 \dot{+} W_0$。这些序列常用公式表示下列重构和分解算法。因此，$\{p_k\}$与$\{q_k\}$称为重构序列，而$\{a_k\}$与$\{b_k\}$称为分解序列。

为了描述这些算法，我们首先回忆 $f_j \in V_j$ 和 $g_j \in W_j$ 都具有唯一级数表示：

$$\begin{cases} f_j(x) = \sum_k c_k^j \phi(2^j x - k) \\ c^j = \{c_k^j\} \in l^2 \end{cases} \tag{1.6.7}$$

和

$$\begin{cases} g_j(x) = \sum_k d_k^j \psi(2^j x - k) \\ d^j = \{d_k^j\} \in l^2 \end{cases} \tag{1.6.8}$$

其中我们有意识地隐藏了规范化系数 $2^{j/2}$。写出$\phi(2^j x-k)$与$\psi(2^j x-k)$以代替使用的$\phi_{j,k}$与 $\psi_{j,k}$，为的是省掉在算法中不必要的倍数 $\sqrt{2}$。在下述分解和重构算法中，函数 f_j 与 g_j 用公式

(1.6.7)与(1.6.8)所定义的序列 c^j 与 d^j 表示。

(i) 分解算法

应用公式(1.6.6)～(1.6.8)，则有

$$\begin{cases} c_k^{j-1} = \sum_l a_{l-2k} c_l^j \\ d_k^{j-1} = \sum_l b_{l-2k} c_l^j \end{cases} \tag{1.6.9}$$

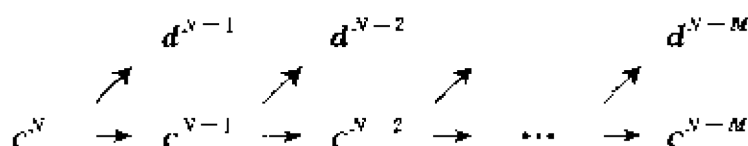


图 1.6.1 小波分解

注意到，c^{j-1} 和 d^{j-1} 都是由 c^j 使用分解序列作为"权"的"移动平均"方法得到，除了那些移动平均只在偶整数点抽样外。这称为向下抽样。因此，图 1.6.1 中的每个箭头都指出在偶指标向下抽样时的移动平均。

(ii) 重构算法

应用公式(1.6.2)、(1.6.3)，(1.6.7)与(1.6.8)，则有

$$c_k^j = \sum_l \left[p_{k-2l} c_l^{j-1} + q_{k-2l} d_l^{j-1} \right] \tag{1.6.10}$$

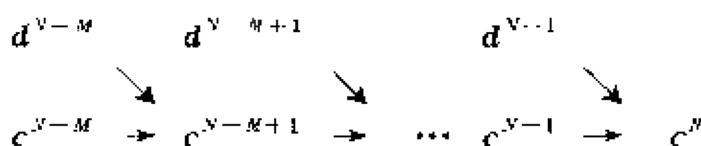


图 1.6.2 小波再构造

这里，c^j 由 c^{j-1} 与 d^{j-1} 使用重构序列作为"权"的两个移动平均得到，除了在进行移动平均之前需要向上抽样外，更确切地说，

当对$\{p_m\}$与$\{q_m\}$取离散卷积时，抽样c_l^{j-1}与d_l^{j-1}在偶指标$m=2l$使用而零在奇指标$m=2l-1$使用。

我们用上述给出的两个算法的一些附注结束本节。首先，如果一个权序列$\{a_k\}$，$\{b_k\}$$\{p_k\}$与$\{q_k\}$是有限的，那么移动平均是一个很简单的FIR（有限脉冲响应）滤波器。然而，如果权序列是无限的，那么移动平均是一个IIR（无限脉冲响应）滤波器。众所周知，假如权序列的符号（或"z变换"）是一个有理函数，那么IIR滤波器能够作为ARMA（自回归移动平均）滤波实现。我们把这些权序列叫作"ARMA序列"。另外，无限权序列不得不截断以给出一个FIR滤波器。其次，如果权序列是由无理数或长的小数表示项组成，那么这些数的舍入（或"量化"）是必要的。当然，截断和量化会引起事先估计的误差。最后，因为尺度函数与小波对(ϕ,ψ)用作"镜滤波器"，那么对称性（或至少反对称性）在信号分析的许多应用中是重要的。例如，在重构压缩图象中，非对称性和非反对称性导致失真。像将在第五章中看到的，(ϕ,ψ)的对称性质用分解序列与重构序列的对称性反映。信号与图象处理的简洁讨论将在第三章中给出。

在第六章中，我们将看到，当样条小波ψ_m（具有最小支撑）用作ψ时，重构序列是有限的而分解序列是ARMA。所有这些序列对于偶阶m是对称的而对于奇阶m是反对称的。另外，对整数倒数的一个公共因子的模，所有这些序列只由整数项组成。

另一方面，当考虑紧支撑正交小波ψ时，重构序列和分解序列都是有限的。然而，对于连续的ψ，既不对称又不反对称是可能的，并且相应的重构序列与分解序列必须是量化的。尺度函数与小波的结构分析和构造方法的详细描述在第五章中给出。特别是，线性相位滤波器与对称尺度函数以及小波之间的关系将在那里研究。最后两章将分别专心研究半正交和正交小波。更确切地说，基数样条小波的相当完整的分析将在第六章中给出，并且着重于紧支撑的正交小波的题目将在第七章中介绍。在这一章中还包含为更好的时间-频率局部化引入的正交小波包(packet)的简洁讨论。

第二章　Fourier 分析

Fourier 分析这门学科是数学分析中最古老的学科之一，它对数学家和工程师都是相当重要的，从实用的观点来看，当人们考虑 Fourier 分析的时候，通常是指(积分)Fourier 变换和 Fourier 级数。Fourier 变换是在实直线 $\mathbb{R}$ 上定义的某个函数 f 的 Fourier 积分。当 f 看作是一个模拟信号时，它的定义域 $\mathbb{R}$ 就称为连续时域。在此情况下，f 的 Fourier 变换 $\hat{f}$ 描述信号 f 的谱特性。因为谱信息用频率给出，所以 Fourier 变换 $\hat{f}$ 的定义域还是 $\mathbb{R}$，它称为频域。另一方面，一个 Fourier 级数是双无限序列到周期函数的一种变换。因此，当一个双无限序列看作是一个数字信号时，它的定义域是整数集合 $\mathbb{Z}$，称为离散时域。这时，它的 Fourier 级数再次描述数字信号的谱特性，一个 Fourier 级数的定义域还是实直线 $\mathbb{R}$，它是频域。然而，因为 Fourier 级数是 2π 周期的，在此情况下，频域 $\mathbb{R}$ 常用单位圆等同，对一个数学家来说，这种表示是更令人满意的，因为 $\mathbb{Z}$ 的"对偶群"是"圆群"。

Fourier 变换与 Fourier 级数的重要性不仅由于它们的物理解释的重要性，如信号的时间-频率分析，而且还由于 Fourier 分析技术是极其有力的。例如，在小波分析研究中，Poisson 求和公式、级数与积分的 Parseval 恒等式、Gaussian 的 Fourier 变换、函数的卷积以及 δ 分布等等都是经常遇到的。因为这本专著打算是自我包容的，本章讨论 Fourier 分析的基本知识方面的预备材料，如上述提及的内容。

2.1 Fourier 变换与 Fourier 逆变换

全书中，所有定义在实直线$\mathbb{R}$上的函数假定是可测的。对于不熟悉 Lebesgue 基本理论的读者，而乐意相信一些标准的定理，在假定 f 是分段连续的情况下，损失是很小的。所谓 Lebesgue 基本理论是指，在$\mathbb{R}$中存在非有限聚点$\{x_j\}$，使对于所有 j 有$x_j<x_{j+1}$，并且 f 在每个开区间以及无界区间$(-\infty, \min x_j)$与$(\max x_j, \infty)$(如果 $\max x_j$ 或 $\min x_j$ 存在)是连续的。对于每个 p，$1\leqslant p<\infty$，令 $L^p(\mathbb{R})$表示 $\mathbb{R}$ 上可测函数 f 的类，使(Lebesgue)积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p dx$$

是有限的。还有，令 $L^\infty(\mathbb{R})$是几乎处处有界函数的集合，即除了在(Lebesgue)测度为零的集合外，处处有界的函数。因此，赋予“范数”

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}, & \text{对 } 1 \leqslant p < \infty \\ \operatorname*{ess\,sup}_{-\infty<x<\infty}|f(x)|, & \text{对 } p = \infty \end{cases}$$

每个 $L^p(\mathbb{R})$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，是一个 Banach 空间。在这本导论性的专著中，因为我们在了解小波和时间-频率分析中不需要任何 Banach 空间结构的知识，读者只要知道 $L^p(\mathbb{R})$范数的少数几个初等性质就可以了，如 Minkowski 不等式：

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p \tag{2.1.1}$$

和 Hölder 不等式：

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_{p(p-1)^{-1}} \tag{2.1.2}$$

其中当 $p=\infty$时，$p(p-1)^{-1}$用 1 代替。公式(2.1.2)的一个推论是

Schwarz 不等式：

$$\| fg \|_1 \leqslant \| f \|_2 \| g \|_2 \tag{2.1.3}$$

因此，观察公式(2.1.3)，我们可以定义"内积"

$$< f,g > = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx, \quad f,g \in L^2(\mathbb{R}) \tag{2.1.4}$$

赋予这个内积后，Banach 空间 $L^2(\mathbb{R})$变成了一个 Hilbert 空间。显然有

$$< f,f > = \| f \|_2^2 \quad , \quad f \in L^2(\mathbb{R}) \tag{2.1.5}$$

下面，我们首先集中注意力于 $L^1(\mathbb{R})$中的函数。通常(对于一个数学家来说)，虚数单位用 i 表示。在全书中，电子工程师可以想象用 j 代替 i。

定义 2.1 函数 $f\in L^1(\mathbb{R})$的 Fourier 变换定义为

$$\hat{f}(\omega) = (\mathscr{F} f)(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}f(x)dx \tag{2.1.6}$$

对于每个 $f\in L^1(\mathbb{R})$，$\hat{f}(\omega)$的一些基本性质概括如下。

定理 2.2 令 $f\in L^1(\mathbb{R})$。那么它的 Fourier 变换 $\hat{f}$ 满足：

(i) $\hat{f}\in L^\infty(\mathbb{R})$并且 $\| \hat{f} \|_\infty \leqslant \| f \|_1$；

(ii) $\hat{f}$ 在 $\mathbb{R}$ 上是一致连续的；

(iii) 如果 f 的导数 f' 也存在并且属于 $L^1(\mathbb{R})$，那么

$$\hat{f}'(\omega) = i\omega\hat{f}(\omega) \tag{2.1.7}$$

(iv) 当 $\omega\to\infty$ 或 $-\infty$ 时，$\hat{f}(\omega)\to 0$。

证明 论断(i)是显而易见的。为了证明(ii)，令 δ 是任意选取的，并且考虑

$$\sup_{\omega}|\hat{f}(\omega+\delta)-\hat{f}(\omega)|$$

$$=\sup_{\omega}\left|\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}(e^{-i\delta x}-1)f(x)dx\right|$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|e^{-i\delta x}-1||f(x)|dx$$

现在，因为$|e^{-i\delta x}-1||f(x)|\leqslant 2|f(x)|\in L^1(\mathbb{R})$，并且当$\delta\to 0$时$|e^{-i\delta x}-1|\to 0$。Lebesgue 控制收敛定理就推出，当$\delta\to 0$时，上述的量趋于零。

为了建立(iii)，我们简单地把 Lebesgue 积分理论中另一标准定理应用公式(2.1.6)的分部积分，并使用事实：当$x\to\pm\infty$时$f(x)\to 0$。

最后，(iv)中的陈述通常称为"Riemann-Lebesgue 引理"。为了证明它，我们首先注意，如果f'存在并且属于$L^1(\mathbb{R})$，那么用(iii)和(ii)，的确有，当$\omega\to\pm\infty$时

$$|\hat{f}(\omega)|=\frac{1}{|\omega|}|\hat{f'}(\omega)|\leqslant\frac{1}{|\omega|}\|f'\|_1\to 0$$

通常，对于任一给定的$\varepsilon>0$，我们能够求得一个函数g，使g、$g'\in L^1$且$\|f-g\|_1<\varepsilon$。于是由(i)，我们有

$$|\hat{f}(\omega)|\leqslant|\hat{f}(\omega)-\hat{g}(\omega)|+|\hat{g}(\omega)|$$

$$\leqslant\|f-g\|_1+|\hat{g}(\omega)|<\varepsilon+|\hat{g}(\omega)|$$

这就完成了(iv)的证明。 ●

对于每个$f\in L^1(\mathbb{R})$，当$\omega\to\pm\infty$时，虽然$\hat{f}(\omega)\to 0$，但它并不意味着$\hat{f}$必须属于$L^1(\mathbb{R})$。为了用一个反例来证明这个结论，我们需要"Heaviside 单位阶跃"函数：

$$u_a(x)=\begin{cases}1, & \text{对 } x\geqslant a\\ 0, & \text{对 } x<a\end{cases}\tag{2.1.8}$$

其中 $a\in\mathbb{R}$。

例子 2.3 函数

$$f(x)=e^{-x}u_0(x)$$

属于 $L^1(\mathbb{R})$，但是它的 Fourier 变换

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{1-i\omega}$$

不属于 $L^1(\mathbb{R})$。

证明 由 $e^{-i\omega x}=\cos\omega x-i\sin\omega x$，有

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega)&=\int_0^\infty e^{-x}\cos\omega x dx-i\int_0^\infty e^{-x}\sin\omega x dx\\&=\frac{1}{1+\omega^2}-\frac{i\omega}{1+\omega^2}=\frac{1}{1-i\omega}\end{aligned}$$

这在 ∞ 表现如 $O(|\omega|^{-1})$，因此不属于 $L^1(\mathbb{R})$。 ●

如果出现 $\hat{f}$ 属于 $L^1(\mathbb{R})$，那么使用如下定义的"Fourier 逆变换"，我们通常能由 $\hat{f}$"复原"f。

定义 2.4 令 $\hat{f}\in L^1(\mathbb{R})$ 是某个函数 $f\in L^1(\mathbb{R})$ 的 Fourier 变换，那么 $\hat{f}$ 的 Fourier 逆变换定义为

$$(\mathscr{F}^{-1}\hat{f})(x):=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix\omega}\hat{f}(\omega)d\omega \qquad (2.1.9)$$

所以，重要的问题是：什么时候 f 能够由 $\hat{f}$ 使用算子 $\mathscr{F}^{-1}$ 复原，或者什么时候 $(\mathscr{F}^{-1}\hat{f})(x)=f(x)$？答案是：在 f 连续的每个点 x。即，有下述定理。

定理 2.5 令 $f\in L^1(\mathbb{R})$ 使它的 Fourier 变换 $\hat{f}$ 也属于 $L^1(\mathbb{R})$。那么

$$f(x)=(\mathscr{F}^{-1}\hat{f})(x) \qquad (2.1.10)$$

在 f 连续的每个点 x 成立。

我们把这个定理的证明推迟到下节。作为代替，我们用导出所谓的"Gaussian 函数"的 Fourier 变换结束本节。

例子 2.6 令 $a>0$，那么

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \tag{2.1.11}$$

特别是，Gaussian 函数 e^{-x^2} 的 Fourier 变换是 $\sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4}$。

证明 考虑函数

$$f(y) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+xy} dx, \quad y \in \mathbb{R} \tag{2.1.12}$$

配完全平方，有

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-\frac{y}{2a})^2+\frac{y^2}{4a}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{\frac{y^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{y^2}{4a}} \tag{2.1.13}$$

现在，因为公式(2.1.12)中定义的函数 $f(y)$ 和函数

$$g(y) := \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{y^2/4a}$$

都能延拓为整(解析)函数，并且因为像在公式(2.1.13)中表明的那样，他们在 $\mathbb{R}$ 上相同，所以他们必定在复数平面 C 上相同。特别是，设 y 为 $-i\omega$，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

●

2.2 连续时间卷积和 δ 函数

令 f 与 g 是 $L^1(\mathbb{R})$ 中的函数。于是 f 与 g 的(连续时间)卷积也是一个 $L^1(\mathbb{R})$ 的函数 h，h 定义为

$$h(x) = (f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy \qquad (2.2.1)$$

很明显，$h \in L^1(\mathbb{R})$；并且事实上

$$\| h \|_1 \leqslant \| f \|_1 \| g \|_1 \qquad (2.2.2)$$

因为

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| dx &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)| |g(y)| dydx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)| dx\right] dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx\right] dy\end{aligned}$$

在公式(2.2.1)中用积分变量变换就得到

$$f * g = g * f, \quad f, g \in L^1(\mathbb{R}) \qquad (2.2.3)$$

即，卷积运算是“可交换”的。由于 $f * g$ 属于 $L^1(\mathbb{R})$，我们能够再次取 $f * g$ 与另一函数 $u \in L^1(\mathbb{R})$ 的卷积；即，我们可以考虑 $(f * g) * u$。容易看到

$$(f * g) * u = f * (g * u), \quad f, g, u \in L^1(\mathbb{R}) \qquad (2.2.4)$$

因此，卷积运算是“可结合”的。

现在的问题是：存在某个函数 $d \in L^1(\mathbb{R})$ 使

$$f * d = f, \quad f \in L^1(\mathbb{R}) \quad ? \qquad (2.2.5)$$

答案是否定的。这个可使用 Fourier 变换的论证来证明。首先,我们给出下述 Fourier 变换算子的重要性质。

定理 2.7 令 f 与 g 属于 $L^1(\mathbb{R})$,那么

$$(f * g)^{\wedge}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) \tag{2.2.6}$$

由于这个证明是 Fubini 定理的一个平凡应用,这里省略。 ●

现在,如果一个函数 $d \in L^1(\mathbb{R})$ 存在使公式(2.2.5)成立,那么,使用定理 2.7,有

$$\hat{f}(\omega)\hat{d}(\omega) = \hat{f}(\omega), \quad f \in L^1(\mathbb{R})$$

即:必须有 $\hat{d}(\omega) = 1$,而这违反在定理 2.2(iv)中建立的 Riemann-Lebesgue 引理。

然而,我们仍然希望"逼近"在公式(2.2.5)中的 d,因为即使一个"卷积恒等式的近似"(或简单地说"近似恒等式")在 Fourier 分析中也是一个很重要的工具。

由前边的讨论,我们看到,首先要求对于如此的一族 $\{d_a\} \subset L^1(\mathbb{R})$ 寻找当 $a \to 0$ 时的渐近恒等式

$$\hat{d}_a(\omega) \approx 1, \qquad \omega \in \mathbb{R} \tag{2.2.7}$$

特别是,我们可以使用规范化 $\hat{d}_a(0) = 1$,或等价地,

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_a(x)dx = 1 \tag{2.2.8}$$

一个极好的选择是 Gaussian 函数族

$$g_a(x) := \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}, \qquad a > 0 \tag{2.2.9}$$

事实上,应用例子 2.6 中的公式(2.1.11),且 $\alpha = 1/4a$,我们有

$$\hat{g}_a(\omega) = e^{-a\omega^2} \tag{2.2.10}$$

它显然满足公式(2.2.7)和(2.2.8)。对于 $\alpha>0$ 的一列递减值，g_α 的图形表示在图 2.2.1 中。

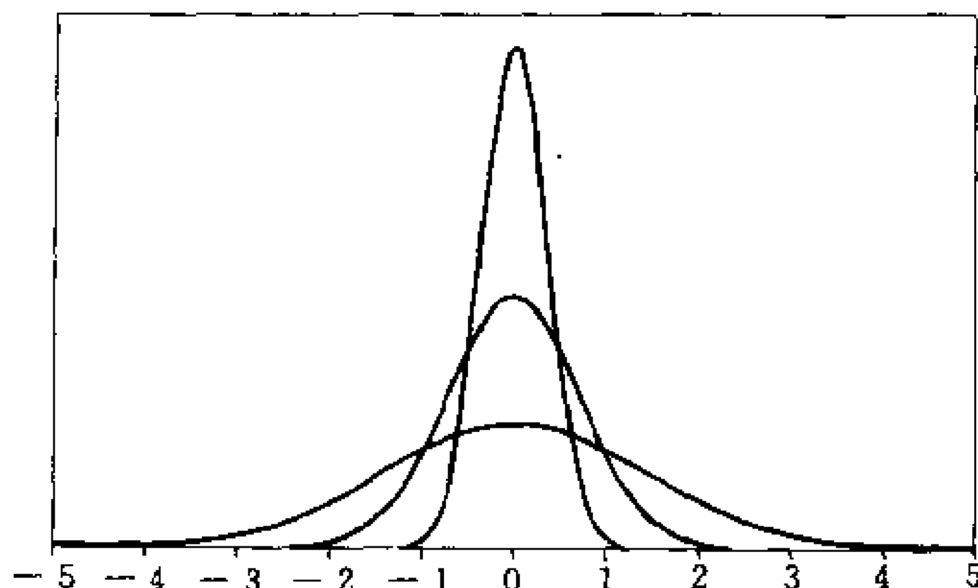


图 2.2.1 Gaussian 函数 g_α，$\alpha=1,1/4,1/16$

注意，在取一个 $L^1(\mathbb{R})$中连续函数的平均时，如果 g_α 使用作为"权"函数，那么当 $\alpha\to 0^+$ 时，权集中趋近于原点，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g_\alpha(y)dy \sim f(x-0)=f(x), \quad \alpha\to 0^+$$

这如同

$$(f*g_\alpha)(x)\sim f(x), \quad \alpha\to 0^+$$

更确切地说，有下述定理。

定理 2.8 令 $f\in L^1(\mathbb{R})$，那么

$$\lim_{\alpha\to 0^+}(f*g_\alpha)(x)=f(x) \tag{2.2.11}$$

在 f 的每个连续点 x 成立。

证明 令 f 在 x 连续并且 $\varepsilon>0$ 是任意给定的。我们选择 $\eta>0$ 使

$$|f(x-y)-f(x)|<\varepsilon$$

对于所有具有$|y|<\eta$的y成立。那么，观察公式(2.2.8)而有$d_a=g_a$，则

$$
\begin{aligned}
&|(f*g_\alpha)(x)-f(x)| \\
&\quad=\left|\int_{-\infty}^{\infty}[f(x-y)-f(x)]g_\alpha(y)dy\right| \\
&\quad\leqslant\int_{-\eta}^{\eta}|f(x-y)-f(x)|g_\alpha(y)dy \\
&\qquad+\int_{|y|\geqslant\eta}|f(x-y)-f(x)|g_\alpha(y)dy \\
&\quad\leqslant\varepsilon\int_{-\eta}^{\eta}g_\alpha(y)dy+\|f\|_1\max_{|y|\geqslant\eta}g_\alpha(y) \\
&\qquad+|f(x)|\int_{|y|\geqslant\eta}g_\alpha(y)dy \\
&\quad\leqslant\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}g_\alpha(y)dy+\|f\|_1 g_\alpha(\eta) \\
&\qquad+|f(x)|\int_{|y|\geqslant\eta/\sqrt{\alpha}}g_1(y)dy \\
&\quad=\varepsilon+\|f\|_1 g_\alpha(\eta)+|f(x)|\int_{|y|\geqslant\eta/\sqrt{\alpha}}g_1(y)dy
\end{aligned}
$$

由于当$\alpha\to0^+$时$g_\alpha(\eta)$和最后一项显然收敛于零，这就完成了定理的证明。 ●

现在，我们考虑在$L^1(\mathbb{R})$中的连续函数的集合C。然后，对于任一固定的$x\in\mathbb{R}$，每个g_α在C上可以作为一个"线性泛函"，定义为

$$g_\alpha\circ f(x-\cdot):=(f*g_\alpha)(x)$$

类似地，我们在C上考虑线性泛函δ，定义为

$$\delta\circ f(x-\cdot):=f(x) \tag{2.2.12}$$

那么定理 2.8 中的公式(2.2.11)就可叙述为

$$g_a \to \delta \qquad 在 C 上, a \to 0^+ \tag{2.2.13}$$

由于 $\delta * f = f$，所以 δ 是"卷积恒等"算子，因此，$\{g_a\}$ 是卷积恒等的一种近似。回忆 δ 不是 $L^1(\mathbb{R})$ 的函数。事实上，它根本就不是一个函数，因为它满足

$$\begin{cases} \delta(x) = 0, & 对于所有\ x \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1 \end{cases} \tag{2.2.14}$$

虽然这个线性泛函 δ 习惯上称为"δ 函数"，但它实际是一个"广义函数"或"分布函数"。如我们前面注意到的那样，因为 $\delta * f = f$ 对于所有 $f \in C$，我们能够指定 δ 的 Fourier 变换是常数 1，即：

$$\hat{\delta}(\omega) = 1 \tag{2.2.15}$$

作为本节的结束，我们通过回过去建立前节的定理 2.5 来证明近似恒等式 $\{g_a\}$ 的能力。让我们首先引入恒等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)g(x)dx, \quad f, g \in L^1(\mathbb{R}) \tag{2.2.16}$$

注意，因为 $\hat{f}$ 与 $\hat{g}$ 像在定理 2.2(i)中已证明的属于 $L^\infty(\mathbb{R})$，所以用 $p=1$ 时的 Hölder 不等式(2.1.2)两边积分都是有限的。Fubini 定理的一个平凡应用就得到公式(2.2.16)。

定理 2.5 的证明 令 $x \in \mathbb{R}$ 是固定的并且设

$$g(y) := \frac{1}{2\pi} e^{iyx} e^{-ay^2} \tag{2.2.17}$$

然后，在例子 2.6 中使用公式(2.1.11)，我们有

$$\hat{g}(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyt}e^{ixt}e^{-\alpha t^2}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(y-x)t}e^{-\alpha t^2}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{(y-x)^2}{4\alpha}} = g_\alpha(x - y)$$

其中 g_α 是在公式(2.2.9)中定义的。因此，由公式(2.2.16)和(2.2.17)得到

$$(f * g_\alpha)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g_\alpha(x-y)dy \qquad (2.2.18)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\hat{g}(y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)g(y)dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iyx}\hat{f}(y)e^{-\alpha y^2}dy$$

现在，如果 f 在 x 是连续的，那么用定理 2.8，当 $\alpha \to 0^+$ 时，公式(2.2.18)的左边收敛于 $f(x)$。所以，由于公式(2.2.18)的右边趋向于 $(\mathscr{F}^{-1}\hat{f})(x)$，有

$$f(x) = (\mathscr{F}^{-1}\hat{f})(x)$$ ●

2.3 平方可积函数的 Fourier 变换

本节，我们引进在 $L^2(\mathbb{R})$ 中函数的 Fourier 变换的定义。为此，需要"自相关"记号。

定义 2.9 一个函数 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 的自相关函数定义为

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)\overline{f(y)}dy \qquad (2.3.1)$$

注意，由 Schwarz 不等式(2.1.3)，在公式(2.3.1)中的积分属

于 $L^1(\mathbb{R})$，所以对于每个 $x\in\mathbb{R}$，$F(x)$是有限值。事实上，在下面引理中，我们能够说得更清楚点。

引理 2.10 令 F 是 $f\in L^2(\mathbb{R})$的自相关函数，那么

(i) $|F(x)|\leqslant\|f\|_2^2$ 对于所有 $x\in\mathbb{R}$；

(ii) $F(x)$在 $\mathbb{R}$ 上是一致连续的。

证明 如上所述，(i)是 Schwarz 不等式的一个推论

$$
\begin{aligned}
|F(x)| &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}|f(x+y)||\overline{f(y)}|dy \\
&\leqslant \left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-y)|^2dy\right\}^{1/2}\|f\|_2 \\
&= \|f\|_2^2
\end{aligned}
$$

为证明(ii)，我们考虑一个任意实数 η，并使用 Schwarz 不等式得到

$$
\begin{aligned}
&|F(x+\eta)-F(x)| \\
&\quad=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\{f(x+\eta+y)-f(x+y)\}\overline{f(y)}dy\right| \\
&\quad\leqslant\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+\eta+y)-f(x+y)|^2dy\right\}^{1/2}\|f\|_2 \\
&\quad=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f(y+\eta)-f(y)|^2dy\right\}^{1/2}\|f\|_2
\end{aligned}
$$

因为 $f\in L^2(\mathbb{R})$，根据 Lebesgue 积分理论的一个基本性质，与 x 无关的括号内的积分，当 $\eta\to 0$ 时，趋向于零。 ●

下述结果有助于扩展 Fourier 变换的记号以便包括 $L^2(\mathbb{R})$的函数。

定理 2.11 令 $f\in L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$，那么 f 的 Fourier 变换 $\hat{f}$ 属于 $L^2(\mathbb{R})$，并且满足下述的"Parseval 恒等式"：

$$
\|\hat{f}\|_2^2=2\pi\|f\|_2^2 \tag{2.3.2}
$$

证明 因为 $\hat{f}$ 是连续的并且由定理 2.2 确保 $\hat{f}$ 在无限远处趋向于零，在公式(2.2.10)中引入的族 $\{\hat{g}_a\}$ 能作为权函数，所以 $\hat{g}_a|\hat{f}|^2 \in L^1(\mathbb{R})$。注意

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_a(x)\,|\hat{f}(x)|^2 dx \\
&\quad = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_a(x)\hat{f}(x)\,\overline{\hat{f}(x)}dx \\
&\quad = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(u)}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(y-u)}\hat{g}_a(x)dx\right]dudy
\end{aligned}$$

其中，除了一个 $(2\pi)^{-1}$ 的倍数外，在括号里边的项是 $\hat{g}_a(x)$ 的 Fourier 逆变换。因此，根据定理 2.5，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_a(x)\,|\hat{f}(x)|^2 dx \\
&\quad = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(u)}g_a(y-u)dydu
\end{aligned}$$

其中 g_a 在公式(2.2.9)中给出。这样，使用公式(2.3.1)引入的自相关函数记号，恒等式(2.3.2)变成

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_a(x)\,|\hat{f}(x)|^2 dx = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} F(x)g_a(x)dx$$

因为 F 是连续的并且 $\{g_a\}$ 是 δ 分布函数的一种近似，有

$$\lim_{a\to 0^+}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_a(x)\,|\hat{f}(x)|^2 dx = 2\pi F(0) \tag{2.3.3}$$

现在，根据 Fatou 引理，有 $\hat{f}\in L^2(\mathbb{R})$；并且因为 $0\leqslant \hat{g}_a|\hat{f}|^2 \leqslant |\hat{f}|^2$，Lebesgue 控制收敛定理允许我们交换在公式(2.3.3)中的极限与积分，于是得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(x)|^2 dx = 2\pi F(0) = 2\pi \| f \|_2^2$$

这就完成了定理 2.11 的证明。 ●

作为定理 2.11 的一个推论，我们注意到 Fourier 变换 $\mathscr{F}$ 可以看作为在 $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ 上的一个"有界线性算子"而具有值域 $L^2(\mathbb{R})$，即

$$\mathscr{F}: L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$$

使 $\| \mathscr{F} \| = \sqrt{2\pi}$。因为 $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中是稠密的，$\mathscr{F}$ 得以保持范数扩展到整个 $L^2(\mathbb{R})$。更确切地说，如果 $f \in L^2(\mathbb{R})$，那么它的截断：

$$f_N(x) := \begin{cases} f(x), & \text{对于 } |x| \leqslant N \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{2.3.4}$$

其中 $N=1,2,\cdots$，属于 $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$，所以 $\hat{f}_N \in L^2(\mathbb{R})$。实际上，容易看到，$\{\hat{f}_N\}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 中的一个 Cauchy 序列，并且根据 $L^2(\mathbb{R})$ 的完备性，有一个函数 $\hat{f}_\infty \in L^2(\mathbb{R})$，使

$$\lim_{N \to \infty} \| \hat{f}_N - \hat{f}_\infty \|_2 = 0$$

定义 2.12 一个函数 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 的 Fourier 变换 $\hat{f}$ 定义为 $\{\hat{f}_N\}$ 的 Cauchy 极限 $\hat{f}_\infty$，并且使用记号

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \underset{N \to \infty}{\text{l.i.m.o.t.}}\, \hat{f}_N(\omega) \\ &= \underset{N \to \infty}{\text{l.i.m.o.t.}} \int_{-N}^{N} e^{-i\omega x} f(x) dx \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

l.i.m.o.t. 代表"二阶平均极限"(Limit in the mean of order two)。

当然，对于 $f \in L^2(\mathbb{R})$，$\hat{f}$ 的定义不依赖于 $f_N \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

的选取。换句话说，在 $L^2(\mathbb{R})$ 中，逼近 f 的任何由 $L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$ 的另外的 Cauchy 序列都能用于定义 $\hat{f}$。但是考虑到它们的简单性，公式(2.3.4)中 f 的截断，特别在信号分析中是常常选择的。我们还注意到，$\mathscr{F}$ 由 $L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$ 到 $L^2(\mathbb{R})$ 的扩展与在 $L^1(\mathbb{R})$ 中原来定义的 $\mathscr{F}$ 是一致的。这可使用基本的 Lebesgue 理论很容易验证。最后，我们必须强调 Parseval 恒等式(2.3.2)扩展到整个 $L^2(\mathbb{R})$。实际上，还可叙述如下。

定理 2.13 *对于所有 $f,g\in L^2(\mathbb{R})$，下述关系成立：*

$$<f,g>=\frac{1}{2\pi}<\hat{f},\hat{g}> \tag{2.3.6}$$

特别是，$\|f\|_2=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\|\hat{f}\|_2$。

公式(2.3.6)中的关系还称为 Parseval 恒等式。

证明 由前述讨论可见

$$\|\hat{h}\|_2^2=2\pi\|h\|_2^2,\quad h\in L^2(\mathbb{R})$$

因此，在内积恒等式

$$<f,g>=\frac{\|f+g\|_2^2-\|f-g\|_2^2}{4}+\frac{\|f-ig\|_2^2-\|f+ig\|_2^2}{4i} \tag{2.3.7}$$

中，用下列四个函数

$$f+g,\quad f-g,\quad f-ig,\quad f+ig$$

的每一个代替 h，公式(2.3.6)就可得到。 ●

回想一下，当在定义 2.4 中引入 Fourier 逆变换时，我们必须把 $\mathscr{F}^{-1}$ 限制于 $L^1(\mathbb{R})$ 与 $\mathscr{F}$ 的值域的交，因为 $\mathscr{F}$ 没有把 $L^1(\mathbb{R})$ 映射到 $L^1(\mathbb{R})$ 里。另外，我们也不能写出

$$f(x)=(\mathscr{F}^{-1}\hat{f})(x)$$

除非 f 在 x 是连续的。另一方面，$L^2(\mathbb{R})$的理论是如此的优越。我们看到，$\mathscr{F}$ 映射 $L^2(\mathbb{R})$为自身。下面，我们证明，这个映射实际上是一一映上的，所以 Fourier 逆变换 $\mathscr{F}^{-1}$ 容易公式化。

在我们深入讨论之前，我们需要下述预备引理和一些记号。

引理 2.14 令 $f,g\in L^2(\mathbb{R})$，那么

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\hat{g}(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(x)g(x)dx \qquad (2.3.8)$$

证明 如在公式(2.2.16)中指出的那样，因为公式(2.3.8)对于 $f,g\in L^1(\mathbb{R})$成立，并且 $L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$在 $L^2(\mathbb{R})$中是稠密的，很容易看到公式(2.3.8)对于 $f,g\in L^2(\mathbb{R})$也成立。 ●

定义 2.15 对于在 $\mathbb{R}$ 上定义的每个 f，函数 f^- 定义如下：

$$f^-(x):=f(-x) \qquad (2.3.9)$$

我们称 f^- 是 f(关于原点)的"反射"。

下述结论是平凡的。

引理 2.16 令 $f\in L^2(\mathbb{R})$，那么

$$\hat{\hat{f}}(x)=(\widehat{\hat{f}^-})(x);\qquad (\hat{f}^-)(x)=(\hat{f})^-(x) \qquad (2.3.10)$$

我们现在打算建立 Fourier 变换算子在 $L^2(\mathbb{R})$上的可逆性。

定理 2.17 Fourier 变换 $\mathscr{F}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$自身上的一个一一映射。换句话说，对每个 $g\in L^2(\mathbb{R})$，有相应的一个且仅有一个 $f\in L^2(\mathbb{R})$使 $\hat{f}=g$，即

$$f(x):=(\mathscr{F}^{-1}g)(x)=:\check{g}(x) \qquad (2.3.11)$$

是 g 的 Fourier 逆变换。

证明 令 $g\in L^2(\mathbb{R})$，那么公式(2.3.9)中定义的它的反射 g^- 也

属于 $L^2(\mathbb{R})$。我们首先指出，$L^2(\mathbb{R})$函数

$$f(x) := \frac{1}{2\pi}(\hat{g^-})(x) \tag{2.3.12}$$

几乎处处满足 $\hat{f}=g$。

实际上，通过依次应用公式(2.3.10)、引理 2.14、公式(2.3.12)、(2.3.10)和 Parseval 恒等式，我们有

$$\begin{aligned}
&\| g - \hat{f} \|_2^2 \\
&= \| g \|_2^2 - 2\mathrm{Re} < g, \hat{f} > + \| \hat{f} \|_2^2 \\
&= \| g \|_2^2 - 2\mathrm{Re} < g, \overline{(\hat{\bar{f}^-})} > + \| \hat{f} \|_2^2 \\
&= \| g \|_2^2 - 2\mathrm{Re} < \hat{g}, \overline{(\bar{f})^-} > + \| \hat{f} \|_2^2 \\
&= \| g \|_2^2 - 2\mathrm{Re} < \hat{g}, f^- > + \| \hat{f} \|_2^2 \\
&= \| g \|_2^2 - 2\mathrm{Re} < \hat{g}, \frac{1}{2\pi}\hat{g} > + \| \hat{f} \|_2^2 \\
&= \frac{1}{2\pi} \| \hat{g} \|_2^2 - \frac{2}{2\pi} \| \hat{g} \|_2^2 + 2\pi \| f \|_2^2 \\
&= -\frac{1}{2\pi} \| \hat{g} \|_2^2 + \frac{1}{2\pi} \| \hat{g^-} \|_2^2 = 0
\end{aligned}$$

所以几乎处处有 $\hat{f}=g$。

按公式(2.3.12)的定义，证明 f 是 $L^2(\mathbb{R})$中的唯一函数，它满足 $\hat{f}=g$；这等价于证明 $\hat{f}=0$ 推出 $f=0$ 几乎处处成立。这是在定理 2.13 中 Parseval 恒等式的一个直接推论。 ●

上述讨论的 Fourier 变换的$L^2(\mathbb{R})$理论通常叫作 Plancherel 理论。

2.4 Fourier 级数

现在我们转到 2π 周期函数的研究。对于每个 p，$1\leqslant p\leqslant\infty$，将

使用下述记号：

$$\|f\|_{L^p(0,2\pi)} := \begin{cases} \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}, & \text{对于 } 1 \leqslant p < \infty \\ \operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}|f(x)|, & \text{对于 } p = \infty \end{cases} \tag{2.4.1}$$

对于每个 p，$L^p(0,2\pi)$表示在 IR 中几乎处处满足 $f(x+2\pi)=f(x)$ 且 $\|f\|_{L^p(0,2\pi)}<\infty$的函数 f 的 Banach 空间。有时只由连续函数组成的 $L^\infty(0,2\pi)$的子空间 $C^*[0,2\pi]$比整个空间 $L^\infty(0,2\pi)$更有用。这里，使用星号 * 是提醒我们，对于 $f\in C^*[0,2\pi]$，$f(0)=f(2\pi)$。

在公式(2.1.1)、(2.1.2)与(2.1.3)中对于 $L^p(\mathrm{IR})$的 Minkowski，Hölder 与 Schwary 不等式，对于 $L^p(0,2\pi)$也是有效的。特别是，对于 $p=2$，我们又一次可定义"内积"

$$< f,g >^* = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{g(x)}dx \tag{2.4.2}$$

$$f,g \in L^2(0,2\pi)$$

其中星号用来区分这个内积与 $L^2(\mathrm{IR})$中的内积。在后边我们还需要下述广义 Minkowski 不等式：

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\int_a^b g(t,x)dt\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \int_a^b\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(t,x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}dt \tag{2.4.3}$$

其中广义只是用一个(Lebesgue)定积分代替一个有限和。还应注意，与不是嵌套的空间 $L^p(\mathrm{IR})$比较，我们有

$$L^p(0,2\pi) \subseteq L^q(0,2\pi), \quad p \geqslant q$$

这个应用 Hölder 不等式很容易验证。

空间 $L^p(0,2\pi)$的伴随空间是满足 $\|\{a_k\}\|_{l^p}<\infty$的双无限序

列$\{a_k\}$，$k\in\mathbb{Z}$，的（序列）空间 $l^p=l^p(\mathbb{Z})$，其中

$$\|\{a_k\}\|_{l^p}:=\begin{cases}\left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}}|a_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}}, & \text{对于 } 1\leqslant p<\infty \\ \sup_k|a_k|, & \text{对于 } p=\infty\end{cases} \tag{2.4.4}$$

另外，Minkowski，Hölder 与 Schwarz 不等式对于序列空间继续有效。类似于 Hilbert 空间 $L^2(\mathbb{R})$与 $L^2(0,2\pi)$，空间 $l^2=l^2(\mathbb{Z})$也是具有内积

$$<\{a_k\},\{b_k\}>_{l^2}:=\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_k\bar{b}_k \tag{2.4.5}$$

的一个 Hilbert 空间。

回顾（积分）Fourier 变换用来描述具有有限能量的一个模拟信号 f（即，$f\in L^2(\mathbb{R})$）的谱特性。这里，我们引入一个“数字信号”$\{c_k\}\in l^p$ 的“离散 Fourier 变换”$\mathscr{F}^*$，以便描述它的谱特性，如下：

$$(\mathscr{F}^*\{c_k\})(x):=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k e^{ikx} \tag{2.4.6}$$

即，$\{c_k\}$的离散 Fourier 变换是用$\{c_k\}$给出“Fourier 系数”的 Fourier 级数。这里没有讨论在公式(2.4.6)中 Fourier 级数的收敛性；但是对于$\{c_k\}\in l^1$，级数对于所有 $x\in\mathbb{R}$ 绝对与一致收敛是明显的。通常，形式级数公式(2.4.6)可以简单看作为序列$\{c_k\}$的“符号”。

因为 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$，所以公式(2.4.6)中的 Fourier 级数还可写为

$$f(x):=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{ikx}=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx \tag{2.4.7}$$

而

$$\begin{cases} a_k = c_k + c_{-k} \\ b_k = i(c_k - c_{-k}) \end{cases} \tag{2.4.8}$$

公式(2.4.8)可很容易使用下述恒等式导出：

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\ \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \end{cases}$$

公式(2.4.7)中的函数记号 $f(x)$ 只是用作对于 Fourier 级数的一个记号。它甚至可能不是一个函数。在任何情况下，总能研究三角多项式

$$(S_N f)(x) := \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \{a_k \cos kx + b_k \sin kx\} \tag{2.4.9}$$

其中 N 是非负整数。这称为 Fourier 级数 f 的“部分和”。

N 次三角多项式

$$D_N(x) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \cos kx = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{2\sin \frac{x}{2}} \tag{2.4.10}$$

是特别重要的。它称为 N 次“Dirichlet 核”。注意，至少在形式上，一个 Fourier 级数 f 的第 N 个部分和 $S_N f$ 能够用 f 与 N 次 Dirichlet 核的卷积得到，即

$$(S_N f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) D_N(t) dt \tag{2.4.11}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)D_N(x-t)dt$$

如果 $f\in L^1(0,2\pi)$，公式(2.4.11)中的积分肯定是有意义的。

另一方面，如果 f 是 $L^p(0,2\pi)$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，中的任一函数，那么能够定义 f 的"离散 Fourier 逆变换"$\mathscr{F}^{*-1}$ 为

$$(\mathscr{F}^{*-1}f)(k) = c_k(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx \quad (2.4.12)$$

即，$\mathscr{F}^{*-1}$ 取 $f\in L^p(0,2\pi)$ 到一个双无限序列 $\{c_k(f)\}$，$k\in\mathbb{Z}$。当然，这个序列定义一个 Fourier 级数

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{ikx} \quad (2.4.13)$$

而且这个序列称为 Fourier 级数的"Fourier 系数"的序列。一个基本的问题是，是否这个序列"收敛"于原来的函数 f。这个论题的讨论在下节进行。下面，我们只研究 $L^2(0,2\pi)$ 理论。

定理 2.18 *令 $f\in L^2(0,2\pi)$，那么 f 的 Fourier 系数的序列 $\{c_k(f)\}$ 属于 l^2 并且满足 Bessel 不等式：*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 \leqslant \|f\|^2_{L^2(0,2\pi)} \quad (2.4.14)$$

证明 令 $S_N(f)$ 表示 Fourier 级数公式(2.4.13)的第 N 个部分和。那么我们有

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \|f - S_N(f)\|^2_{L^2(0,2\pi)} \quad (2.4.15) \\ &= \|f\|^2_{L^2(0,2\pi)} - 2\mathrm{Re}\langle f, S_N(f)\rangle^* \\ &\quad + \|S_N(f)\|^2_{L^2(0,2\pi)} \end{aligned}$$

其中容易验证

$$< f, S_N(f) >^* = \sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2 \quad (2.4.16)$$

而

$$\| S_N(f) \|^2_{L^2(0,2\pi)} = \sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2 \quad (2.4.17)$$

因此，把公式(2.4.16)与(2.4.17)代入公式(2.4.15)，我们有

$$\sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2 \leqslant \| f \|^2_{L^2(0,2\pi)}$$

因为这个不等式对于任何 N 都成立，我们就证明了公式(2.4.14)。●

定理 2.18 的逆定理是下述所谓的 Riesz-Fischer 定理。

定理 2.19 令 $\{c_k\} \in l^2$，那么存在某个 $f \in L^2(0,2\pi)$ 使 c_k 是 f 的第 k 个 Fourier 系数。而且

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \| f \|^2_{L^2(0,2\pi)} \quad (2.4.18)$$

这个定理断定，离散 Fourier 变换 $\mathscr{F}^*$ 把 l^2 映入 $L^2(0,2\pi)$，并且恒等式对于在 $\mathscr{F}^*$ 映射之下，l^2 的值域中所有 f 成立。

证明 对于每个正整数 N，考虑三角多项式

$$S_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} \quad (2.4.19)$$

因为 $\{c_k\}$ 属于 l^2，所以序列

$$\sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2$$

是一个实数的 Canchy 序列。因此，对于 $\| S_N - S_M \|^2_{L^2(0,2\pi)}$，考虑类似于公式(2.4.17)的恒等式，显然，$\{S_N\}$是 $L^2(0,2\pi)$ 中的一个 Cauchy 序列。令 $f \in L^2(0,2\pi)$是这个序列的极限。那么根据 Bessel 不等式(2.4.14)，f 的 Fourier 系数 $c_k(f)$满足估计

$$\sum_{k=-N}^{N} |c_k(f) - c_k|^2 \leqslant \| f - S_N \|^2_{L^2(0,2\pi)}$$

因此，取 $N \to \infty$，可得到

$$c_k(f) = c_k, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

而且，由公式(2.4.16)与(2.4.17)，则有

$$\begin{aligned} &\| f - S_N \|^2_{L^2(0,2\pi)} \\ &\quad = \| f \|^2_{L^2(0,2\pi)} - 2\mathrm{Re} < f, S_N >^* + \| S_N \|^2_{L^2(0,2\pi)} \\ &\quad = \| f \|^2_{L^2(0,2\pi)} - \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 \end{aligned}$$

当 $N \to \infty$时，这就得到公式(2.4.18)。 ●

再次强调定理 2.19 只是断言，恒等式(2.4.18)对于在离散 Fourier 变换算子下空间 l^2 的值域中的所有函数是有效的。公式(2.4.18)的确能够扩展到整个 $L^2(0,2\pi)$，它是 Weierstrass 定理的一个推论。该定理说，所有三角多项式的集合在 $L^2(0,2\pi)$中是稠密的。恒等式(2.4.18)，扩展到整个 $L^2(0,2\pi)$，称为对于 $L^2(0,2\pi)$ 的“Parseval 恒等式”。建立 Weierstrass 定理的一个简单方法是考虑 $f \in L^2(0,2\pi)$的 Fourier 级数部分和序列的 Cesàro 平均。

令 $f \in L^2(0,2\pi)$ 且用 S_nf 表示在公式(2.4.5)中定义的 Fourier 级数的第 n 个部分和。然后，$\{S_Nf\}$的第 N 个 Cesàro 平均给定如下：

$$\sigma_N f := \frac{S_0 f + \cdots + S_N f}{N+1} \tag{2.4.20}$$

因为 $S_N f$ 是在公式(2.4.11)中定义的(对于 $f \in L^2(0,2\pi) \subset L^1(0,2\pi)$)$f$与 Dirichlet 核 D_n 的卷积,由此得出 $\sigma_N f$ 是 f 与

$$K_N(x) := \frac{D_0(x) + \cdots + D_N(x)}{N+1}$$

$$= \frac{1}{N+1} \frac{\sin^2(\frac{N+1}{2}x)}{2\sin^2(\frac{x}{2})} \tag{2.4.21}$$

定义的所谓"Fejér 核"的卷积,即

$$(\sigma_N f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)K_N(t)dt \tag{2.4.22}$$

注意,三角多项式 K_N 不同于 $D_N(x)$:$K_N(x) \geqslant 0$ 对于所有 x 成立。这个性质在建立下述多项式稠密性的结果中是至关重要的。

定理 2.20 令 $f \in L^2(0,2\pi)$,那么

$$\lim_{N \to \infty} \| f - \sigma_N f \|_{L^2(0,2\pi)} = 0$$

在证明这个结果之前,我们发现,方便的是引入"$L^p(0,2\pi)$的连续模"的记号:

$$
\begin{cases}
\omega_p(f;\eta) := \sup\limits_{0<h\leqslant\eta}\left\{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}|f(x-h)-f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}, \\
\qquad \text{对 } f\in L^p(0,2\pi)\text{，其中 } 1\leqslant p<\infty\text{；} \\
\qquad \text{且如果 } p=\infty\text{，那么} \\
\omega(f;\eta) := \omega_\infty(f;\eta) \\
\qquad := \sup\limits_{0<h\leqslant\eta}\max\limits_x|f(x+h)-f(x)|, \\
\qquad \text{对 } f\in C^*[0,2\pi]
\end{cases}
\tag{2.4.23}
$$

注意，$L^\infty(0,2\pi)$ 用它的子空间 $C^*[0,2\pi]$ 代替。还必须注意到 $\omega_p(f;\eta)$ 与 $\omega(f;\eta)$ 是 η 的非减函数，并且

$$
\begin{cases}
\omega_p(f;\eta)\to 0 \text{ 当 } \eta\to 0^+ \text{ 时，对于 } f\in L^p(0,2\pi) \\
\omega(f;\eta)\to 0 \text{ 当 } \eta\to 0^+ \text{ 时，对于 } f\in C^*[0,2\pi]
\end{cases}
\tag{2.4.24}
$$

现在转到定理 2.20 的证明。

证明 因为

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F_N(x)dx=1$$

依次用广义 Minkowski 不等式(2.4.3)和 $\omega_2(f;|t|)$ 的定义，我们有

$$
\begin{aligned}
&\|f-\delta_N f\|_{L^2(0,2\pi)} \\
&=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{2\pi(N+1)}\int_0^{2\pi}\{f(x)-f(x-t)\}\right.\right. \\
&\qquad\left.\left.\times\left[\frac{\sin\frac{(N+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 dt\right|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi(N+1)}\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{\sin\frac{(N+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)-f(x-t)|^2dx\right]^{\frac{1}{2}}\right\}dt$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi(N+1)}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{(N+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\omega_2(f;|t|)dt$$

$$\leqslant \frac{\pi}{N+1}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\frac{(N+1)t}{2}}{t^2}\omega_2(f;t)dt$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{(N+1)\pi/2}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2\omega_2\left(f;\frac{2u}{N+1}\right)du$$

令 $\varepsilon>0$ 是任意给定的，选择 $M>0$ 使

$$\pi\|f\|_{L^2(0,2\pi)}\int_M^{\infty}\frac{du}{u^2}<\varepsilon$$

因为 $\omega_2(f;\cdot)\leqslant 2\|f\|_{L^2(0,2\pi)}$ 和 $\omega_2(f;\cdot)$ 是一个非减函数，由此得到，对于 $(N+1)\pi\geqslant 2M$

$$\|f-\sigma_N f\|_{L^2(0,2\pi)}<\varepsilon+\frac{\pi}{2}\int_0^M\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2\omega_2\left(f;\frac{2u}{N+1}\right)du$$

$$<\varepsilon+\frac{M\pi}{2}\omega_2\left(f;\frac{2M}{N+1}\right)\rightarrow\varepsilon+0$$

当 $N\rightarrow\infty$ 时，这就完成了定理 2.20 的证明。 ●

使用前述关于三角多项式在 $L^2(0,2\pi)$ 中的稠密性结果，我们现在能够建立本节的下述重要结果。

定理 2.21 公式(2.4.6)中定义的离散 Fourier 变换是 l^2 到 $L^2(0,2\pi)$ 上的一个等距同构。换句话说，$\mathscr{F}^{-*}$ 把 l^2 映射到 $L^2(0,2\pi)$ 上，使 Parseval 恒等式

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2dx,\quad f\in L^2(0,2\pi)\tag{2.4.25}$$

成立，其中 $c_k=c_k(f)$ 是 f 的第 k 个 Fourier 系数。

证明 定理 2.19 已经说 $\mathscr{F}^*$ 把 l^2 映射入 $L^2(0,2\pi)$。为证明映射是映上的，令 $f\in L^2(0,2\pi)$ 是任意选取的，并且让 $\{c_k\}$ 表示 f 的 Fourier 系数的序列。那么，根据定理 2.18 中的 Bessel 不等式，我们有

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2\leqslant\|f\|^2_{L^2(0,2\pi)}$$

另一方面，根据公式(2.4.20)中 σ_Nf 的定义，并且参考公式(2.4.9)中的 S_nf，显然

$$(\sigma_Nf)(x)=\sum_{k=-N}^{N}\left(1-\frac{|k|}{N+1}\right)c_ke^{ikx}$$

所以

$$\begin{aligned}\|\sigma_Nf\|^2_{L^2(0,2\pi)}&=\sum_{k=-N}^{N}\left(1-\frac{|k|}{N+1}\right)^2|c_k|^2\\&\leqslant\sum_{k=-N}^{N}|c_k|^2\leqslant\|f\|^2_{L^2(0,2\pi)}\end{aligned}$$

即，我们有

$$\|f\|_{L^2(0,2\pi)}\geqslant\left\{\sum_{k=-N}^{N}|c_k|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\geqslant\|\sigma_Nf\|_{L^2(0,2\pi)}$$

$$\geqslant \|f\|_{L^2(0,2\pi)} - \|f - \sigma_N f\|_{L^2(0,2\pi)}$$

因此使用定理 2.20,就建立了 Parseval 恒等式(2.4.45)。这个恒等式保证 $\mathscr{F}^*$ 是一一对应的,因为如果 f 的所有 Fourier 系数是零,那么 $\|f\|_{L^2(0,2\pi)}=0$,或者 $f=0$ 几乎处处成立。 ●

2.5 基本收敛定理和 Poisson 求和公式

虽然 Fourier 级数收敛的理论是一个很有魅力的论题,但是详细研究已超出本书的范围。我们只讨论收敛的两个基本检验法而省略它们的推导。

首先,让我们叙述:存在一个 2π 周期的连续函数,它的 Fourier 级数在每一个有理数点发散。另外,甚至存在一个 $L^1(0,2\pi)$中的函数,它的 Fourier 级数处处发散。因此,必须施加某一些条件保证收敛。要求最弱假定的收敛结果是一个很深刻的结果,这个结果说:在 $L^p(0,2\pi)$,其中 $1<p\leqslant\infty$,中的每个函数 f 的 Fourier级数几乎处处收敛于 f。下面,我们对一致收敛,或至少在一些特殊点上的收敛感兴趣。

下述结果称为收敛的 Dini Lipschitz 检验法。这里将使用公式(2.4.23)中引入的一致连续模的记号 $\omega(f;\eta)$。

定理 2.22 令 $f\in C^*[0,2\pi]$使

$$\int_0^a \frac{\omega(f;t)}{t}dt < \infty \tag{2.5.1}$$

对于某个 $a>0$ 成立,那么 f 的 Fourier 级数一致收敛于 f,即

$$\lim_{N\to\infty} \|f - S_N f\|_{L^\infty[0,2\pi]} = 0$$

例如,如果 $\omega(f;\eta)=O(\eta^\alpha)$ 对于某个 $\alpha>0$ 成立,那么公式(2.5.1)中的条件必然满足。

下面叙述的第二个收敛检验法称为 Dirichlet-Jordan 检验法。

对于振荡不是太激烈的函数，它是有效的。这样的函数称为"有界变差"函数。众所周知(由定义导出不太困难)，每一个在区间$[a,b]$上的有界变差函数能够写为两个非减函数之差。因此，如果f是在$[a,b]$上的有界变差函数，那么两个单边极根

$$\begin{cases} f(x^+) := \lim\limits_{h\to 0^+} f(x+h) \\ f(x^-) := \lim\limits_{h\to 0^+} f(x-h) \end{cases} \tag{2.5.2}$$

在每个$x, a<x<b$，存在。

定理 2.23 令f是一个在$[0,2\pi]$上有界变差的2π周期函数，那么f的 Fourier 级数处处收敛于$(f(x^+)+f(x^-))/2$，即

$$\lim_{N\to\infty}(S_N f)(x) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} \tag{2.5.3}$$

对于每个$x\in\mathbb{R}$成立。而且，如果f在任一紧区间$[a,b]$也是连续的，那么f的 Fourier 级数在$[a,b]$上一致收敛于f。

虽然在本章的前三节中研究的(积分)Fourier 变换是定义在$L^1(\mathbb{R})$，但是 Fourier 级数表示只是周期函数。为了周期化一个函数$f\in L^1(\mathbb{R})$，最简单的方法是考虑

$$\Phi_f(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+2\pi k) \tag{2.5.4}$$

引起的第一个问题是，Φ_f是否是一个函数。对于$p=1$，回答是肯定的，表示如下。

引理 2.24 令$f\in L^1(\mathbb{R})$，那么在公式(2.5.4)中定义的级数几乎处处收敛于某个2π周期函数Φ_f。而且，几乎处处收敛是绝对的，并且$\Phi_f\in L^1(0,2\pi)$具有

$$\|\Phi_f\|_{L^1(0,2\pi)} \leqslant \frac{1}{2\pi}\|f\|_1 \tag{2.5.5}$$

证明 一旦有

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}|f(x+2\pi k)|dx<\infty$$

就建立了几乎处处绝对收敛。除此而外，与公式(2.5.5)一起，由简单观察直接得到

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}|\Phi_f(x)|dx &\leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}|f(x-2\pi k)|dx\\ &=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)}|f(x)|dx\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty\end{aligned}$$

由此引理，就可以考虑 Φ_f 的 Fourier 级数，即

$$\Phi_f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(\Phi_f)e^{ikx}$$

其中

$$\begin{aligned}c_k(\Phi_f)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-ikx}\Phi_f(x)dx\\ &=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}e^{-ikx}f(x+2\pi j)dx\\ &=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)}e^{-ikx}f(x)dx\\ &=\frac{1}{2\pi}\hat{f}(k)\end{aligned}$$

因此，如果 Φ_f 的 Fourier 级数收敛于 Φ_f，那么两个量

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(x+2\pi k) \tag{2.5.6}$$

与

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)e^{ikx} \tag{2.5.7}$$

能够是相等的。不幸的是，因为 Φ_f 只是属于 $L^1(0,2\pi)$，它的 Fourier 级数甚至可以处处发散。所以，必须施加一些条件于 Φ_f 或 f，以便能够保证公式(2.5.6)与(2.5.7)是相同的。首先，我们满足于一个很一般的论断。

定理 2.25 令 $f\in L^1(\mathbb{R})$满足下述两个条件：

(i) 级数(2.5.6)处处收敛于某个连续函数；

(ii) Fourier 级数(2.5.7)处处收敛。

那么下述"Poisson 求和公式"成立：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(x+2\pi k)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)e^{ikx},\quad x\in\mathbb{R} \tag{2.5.8}$$

特别是

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(2\pi k)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(k) \tag{2.5.9}$$

在给出 f 的一些充分条件以保证(i)与(ii)满足之前，我们注意到，Poisson 求和公式(2.5.8)或(2.5.9)能够陈述为稍为不同的形式。为此，我们只要注意，如果 $f_a(x):=f(ax)$，其中 $a>0$，那么 $\hat{f}_a(x)=a^{-1}\hat{f}(\frac{x}{a})$。因此，公式(2.5.8)与(2.5.9)变成

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(x+2\pi ak)=\frac{1}{2\pi a}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(\frac{k}{a})e^{i\frac{k}{a}x}\\ \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(2\pi ak)=\frac{1}{2\pi a}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(\frac{k}{a})\end{cases} \tag{2.5.10}$$

特别是，选择 $a=(2\pi)^{-1}$，我们有

$$\begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(2\pi k) e^{i2\pi kx} \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(2\pi k) \end{cases} \tag{2.5.11}$$

现在列举使定理 2.25 中(i)与(ii)都成立的一些条件。

推论 2.26 令 f 是对于某个 $\alpha>1$ 满足

$$f(x), \hat{f}(x) = O\left(\frac{1}{1+|x|^{\alpha}}\right) \tag{2.5.12}$$

的一个可测函数。那么 Poisson 求和公式(2.5.8)对于所有 $x\in \mathbb{R}$ 成立。

注意，因为 $\hat{f}$ 满足公式(2.5.12)，所以 f 必定是连续的，显然(i)与(ii)都正确。

推论 2.27 令 $f\in L^1(\mathbb{R})$ 并且假定在公式(2.5.4)中的级数处处收敛于在 $[0,2\pi]$ 上的一个有界变差的连续函数，那么 Poisson 求和公式(2.5.8)对于每个 $x\in \mathbb{R}$ 成立。

如果 Φ_f 是 $[0,2\pi]$ 上的一个有界变差连续函数，那么，根据定理 2.23，它的 Fourier 级数(2.5.7)处处收敛于 Φ_f。即，(2.5.6)和(2.5.7)是恒等的。

最重要的一个例子是任何一个紧支撑的有界变差连续函数。对于这样一个 f，公式(2.5.4)只是一个有限和，因此 Φ_f 也是一个连续函数并且在 $[0,2\pi]$ 上是有界变差的。至少第四章中详细研究的至少二阶的全部 B-样条，是一些典型的例子。

最后，使用 Poisson 求和公式研究公式(2.3.1)中定义的函数 $f\in L^2(\mathbb{R})$ 的自相关函数 F 的 Fourier 变换来结束本章。这将更好地给我们在第五章中研究半正交小波的构造作了准备。使用公式(2.3.9)中引入的 f 的反射记号 f^-，我们可以重新把 F 表示为

$$F(x) = (f * (\bar{f})^{-})(x)$$

因此，使用引理 2.16，得到

$$\hat{F}(x) = |\hat{f}(x)|^2 \tag{2.5.13}$$

现在，因为 f 属于 $L^2(\mathbb{R})$，所以用 Parseval 恒等式，$\hat{f}$ 也属于 $L^2(\mathbb{R})$。因此，$\hat{F} \in L^1(\mathbb{R})$并且用引理 2.24，

$$\Phi_{\hat{F}}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{F}(x + 2\pi k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(x + 2\pi k)|^2 \tag{2.5.14}$$

几乎处处收敛，而且 $\Phi_{\hat{F}} \in L^1(0,2\pi)$。

为研究 $\Phi_{\hat{F}}$ 的 Fourier 级数，要利用外加的条件，即 $f \in L^1(\mathbb{R})$。那么$(\bar{f})^{-}$也属于 $L^1(\mathbb{R})$，并且卷积 $F = f * (\bar{f})^{-}$ 也属于 $L^1(\mathbb{R})$。所以，根据定理 2.5，有

$$\begin{aligned} F(x) &= (\mathscr{F}^{-1}\hat{F})(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}\hat{F}(y)dy \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\hat{F}\right)^{\wedge}(-x) \end{aligned} \tag{2.5.15}$$

且因此，$\Phi_{\hat{F}}$ 的 Fourier 系数用

$$c_k = c_k(\Phi_{\hat{F}}) = \left(\frac{1}{2\pi}\hat{F}\right)^{\wedge}(k) = F(-k)$$

给出。即，$\Phi_{\hat{F}}$ 的 Fourier 级数能够写为

$$\Phi_{\hat{F}}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(-k)e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k)e^{-ikx} \tag{2.5.16}$$

所以，就有

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(x+2\pi k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k)z^k \qquad (2.5.17)$$

几乎处处成立，其中 $z=e^{-ix}$，并且公式(2.5.17)的右边称为序列 $\{F(k)\}$ 的"符号"。如果 f 碰巧具有紧支撑，那么它的自相关函数 F 也具有紧支撑，并且 $\{F(k)\}$ 的符号是一个"Laurent 多项式"。这个 Laurent 多项式还称为用 f 生成的"Euler-Frobenius 多项式"。因此，公式(2.5.17)给出了用紧支撑函数 f 生成的 Euler-Frobonius 多项式与在公式(2.5.14)中的非负函数 Φ_f 之间的一个很重要的关系，而公式(2.5.14)对研究无约束基底、正交化和对偶性是有帮助的。这些题目的细节在以后几章，特别是在第五章中研究。

返回到公式(2.5.17)而没有假定 f 是紧支撑的，对于 $f\in L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$ 只具有几乎处处相等。下面，我们给出确保对于所有 $x\in\mathbb{R}$ 公式(2.5.17)成立的三条不同的条件

定理 2.28 令 $f\in L^2(\mathbb{R})$ 满足下述三个条件中任何一个：

(i) $f(x)=O(|x|^{-\beta})$，$\beta>1$，并且 $\hat{f}(x)=O(|x|^{-\alpha})$，$\alpha>\frac{1}{2}$，当 $|x|\to\infty$ 时。

(ii) $\hat{f}$ 是紧支撑的并且对于某个 $\gamma>0$ 属于类 Lip(γ)，即

$$\sup_x \sup_{0<t\leqslant h} |\hat{f}(x+t)-\hat{f}(x)| = O(h^\gamma),\quad \text{当 } h\to 0^+ \text{ 时} \qquad (2.5.18)$$

(iii) $\hat{f}$ 是一个紧支撑的连续函数，并且在它的支撑上是有界变差的。

那么，由此得到

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(x+2\pi k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(y+k)\overline{f(y)}dy\right\} e^{-ikx} \qquad (2.5.19)$$

对于所有 $x\in\mathbb{R}$ 成立。

注意，在条件(i)～(iii)中的每一个已经隐含公式(2.5.19)的左边是 Fourier 级数右边给出的一个 2π 周期连续函数。这对于(i)是清楚的，但对于(ii)与(iii)还需作一点工作，对于(i)，(ii)与(iii)的每一个的 Fourier 级数在每个 $x\in\mathbb{R}$ 的收敛分别由推论 2.26、定理2.22与定理2.23得到。 ●

第三章　小波变换和时间-频率分析

为了由 Fourier 变换研究一个模拟信号的谱特性，必须获得在时域中信号的全部信息，甚至包括将来的信息。另外，如果一个信号在某个时刻的一个小的邻域中变化了，那么整个谱就受到影响。实际上，在极端的情况下，δ 分布 $\delta(t-t_0)$ 只具有一个点 t_0 的支撑，它的 Fourier 变换是 $e^{-it_0\omega}$，这无疑覆盖整个频域。因此，在非平稳信号分析和实时信号处理的许多应用中，只有 Fourier 变换公式是相当不够的。

在时间-频率分析中，Fourier 变换公式的不足已经被 D. Gabor 注意到了，D. Gabor 在它的 1946 年的论文中，为了提取信号 Fourier 变换的局部信息，引入了一个时间局部化“窗函数”$g(t-b)$，其中参数 b 用于平移动窗以便覆盖整个时域。实际上，Gabor 使用了一个 Gaussian 函数作为窗函数 g。因为一个 Gaussian 函数的 Fourier 变换还是一个 Gaussian 函数，所以 Fourier 逆变换也是局部的。

本章的第 1 节专门研究 Gabor 变换。一般所谓的“短时 Fourier 变换”(STFT)的讨论和影响窗的大小的测不准原理是第 2 节的内容。特别是，将会看到，任何 STFT 的时间-频率窗是严格的，因此对于检测高频信号和研究低频信号不是很有效的。这就促使在第 3 节中引入积分小波变换(IWT)，代替窗口 Fourier 变换及其逆变换，IWT 给函数(或信号)与它的 Fourier 变换直接开窗。这就允许膨胀(或尺度)参数有一个范围，根据高频和低频使时间-频

率变窄或变宽。为了由信号分解的局部谱信息重构这个信号，逆 IWT 是需要的。连续时间与离散时间观测的信息都要考虑。这将导致在本章最后两节中框架与小波级数的研究。

3.1 Gabor 变换

一个在 $L^2(\mathbb{R})$ 中的函数常用于表示具有有限能量的一个模拟信号，并且它的 Fourier 变换

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)dt \qquad (3.1.1)$$

揭示信号的谱信息。这里和整个这一章，t 与 ω 分别留作表示时间与频率变量。很不幸，只有公式(3.1.1)对于由信号 f 的局部观测提取谱 $\hat{f}$ 的信息不是很有用的。真的需要一个“好”的时间窗。

对于时间局部化的“最优”窗，用任一 Gaussian 函数

$$g_\alpha(t) := \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}} \qquad (3.1.2)$$

实现，其中作为窗函数，$\alpha>0$ 是定值(见图 2.2.1)。这里，最佳性是用在下节讨论的测不准原理描述。对于任何定值 $\alpha>0$，一个函数 $f\in L^2(\mathbb{R})$ 的“Gabor 变换”定义为

$$(\mathscr{G}_b^\alpha f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-i\omega t} f(t))\, g_\alpha(t-b)dt \quad (3.1.3)$$

即，$(\mathscr{G}_b^\alpha f)(\omega)$ 在 $t=b$ 的周围使 f 的 Fourier 变换局部化。窗的“宽度”用(约定的)正常数 α 决定，这在下面讨论。注意，由例子 2.6 中的公式(2.1.11)在 $\omega=0$ 和 $a=(4\alpha)^{-1}$ 时，我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\alpha(t-b)db = \int_{-\infty}^{\infty} g_\alpha(x)dx = 1 \qquad (3.1.4)$$

所以

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\mathscr{G}_b^a f)(\omega)db = \hat{f}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}$$

也就是说，f 的 Gabor 变换的集合

$$\{\mathscr{G}_b^a f : b \in \mathbb{R}\}$$

精确分解 f 的 Fourier 变换 $\hat{f}$，以便给出它的局部谱信息。为选择窗函数宽度的度量，使用标准偏差或均方根持续的记号，定义为

$$\Delta_{g_a} := \frac{1}{\| g_a \|_2}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 g_a^2(x) dx\right\}^{1/2} \tag{3.1.5}$$

注意，由于 g_a 是一个偶函数，所以用公式(1.2.5)定义的这个函数的中心是 0，因此 Δ_{g_a} 与在定义 1.2 中引入的"半径"通用记号相同。特别是，窗函数 g_a 的宽是 $2\Delta_{g_a}$。

定理 3.1 对于每个 $a>0$

$$\Delta_{g_a} = \sqrt{a} \tag{3.1.6}$$

即，窗函数 g_a 的宽是 $2\sqrt{a}$。

证明 在公式(2.1.11)中令 $\omega=0$，我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi}\, a^{-1/2} \tag{3.1.7}$$

并且对参数 a 微分两边得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} a^{-3/2} \tag{3.1.8}$$

因此，在公式(3.1.7)和(3.1.8)中令 $a=(2\alpha)^{-1}$，由此得到

$$\| g_a \|_2 = (8\pi a)^{-1/4} \tag{3.1.9}$$

从而

$$\Delta_{g_a} = (8\pi a)^{1/4}\left\{\frac{1}{4\pi a}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}(2a)^{3/2}\right\}^{1/2} - \sqrt{a}$$

我们可以用稍许不同的形式解释在公式(3.1.3)中的 Gabor 变换,即,设

$$G_{b,\omega}^{a}(t) := e^{i\omega t}g_a(t-b) \tag{3.1.10}$$

我们有

$$(\mathscr{G}_b^a f)(\omega) = \langle f, G_{b,\omega}^a \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{G_{b,\omega}^a(t)}dt \tag{3.1.11}$$

换句话说,不先把 $\mathscr{G}_b^a f$ 看作 f 的 Fourier 变换的局部化,而是使用在公式(3.1.10)中的窗函数 $G_{b,\omega}^a$,把它解释为给函数(或信号)f 开窗。后边,我们将按照这个观点把它与"积分小波变换"比较。对于 $b=0$, $\omega=2\pi$ 和 $a=1$, $G_{b,\omega}^a$ 的实部与虚部的图形表示在图 3.1.1-3.1.2中。

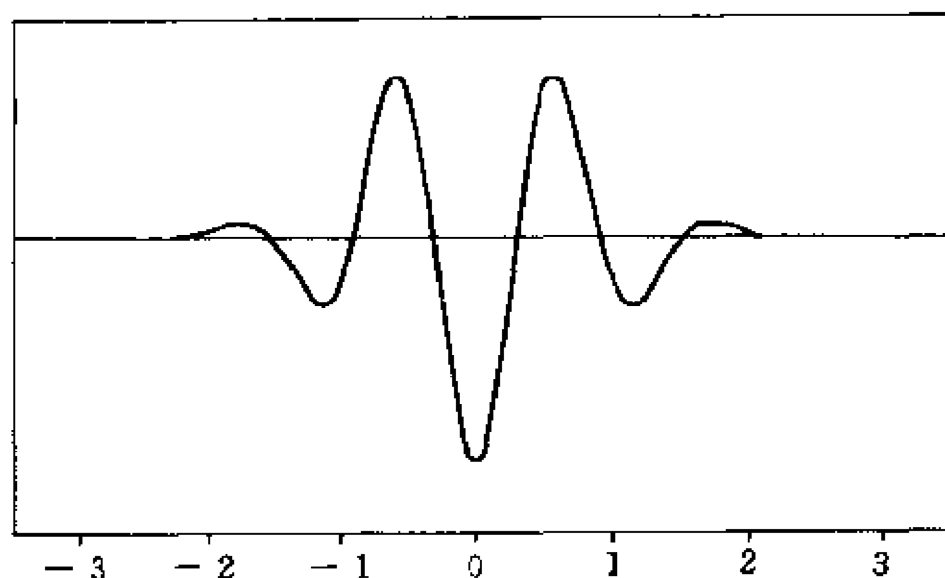


图 3.1.1 $\mathrm{Re}G_{0,2\pi}^a$, $a=0.2925$

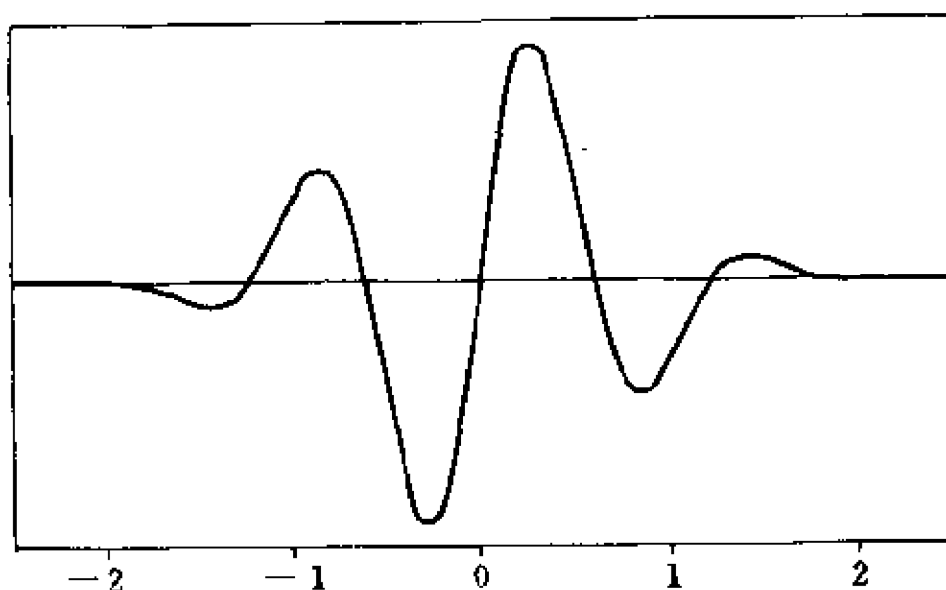


图 3.1.2　$\mathrm{Im}G^{\alpha}_{0,2\pi}$,　$\alpha = 0.2300$

公式(3.1.11)的一个优点是,公式(2.3.6)中的 Parseval 恒等式能够用来把 f 与 $\hat{f}$ 的 Gabor 变换联系起来。事实上,因为

$$\hat{G}^{\alpha}_{b,\omega}(\eta) = e^{-ib(\eta-\omega)}e^{-\alpha(\eta-\omega)^2} \tag{3.1.12}$$

由公式(2.2.10)可见,有

$$\begin{aligned}(\mathscr{G}^{\alpha}_{b}f)(\omega) &= \langle f, G^{\alpha}_{b,\omega} \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{G}^{\alpha}_{b,\omega} \rangle \qquad (3.1.13)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\eta)e^{ib(\eta-\omega)}e^{-\alpha(\eta-\omega)^2}d\eta \\ &= \frac{e^{-ib\omega}}{2\sqrt{\pi\alpha}}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{ib\eta}\hat{f}(\eta))g_{1/4\alpha}(\eta-\omega)d\eta \\ &= \frac{e^{-ib\omega}}{2\sqrt{\pi\alpha}}(\mathscr{G}^{1/4\alpha}_{\omega}\hat{f})(-b)\end{aligned}$$

现在从两种不同的观点来解释公式(3.1.13)。首先,考虑

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\, g_a(t-b) dt$$

$$= \left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-ib\omega}\right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{ib\eta} \hat{f}(\eta)) g_{1/4a}(\eta - \omega) d\eta$$

(3.1.14)

这个等式说明,除去乘数项$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-ib\omega}$之外,在 $t=b$ 具有窗函数 g_a 的 f 的"窗口 Fourier 变换"与在 $\eta=\omega$ 具有窗函数 $g_{1/4a}$ 的 $\hat{f}$ 的"窗口逆 Fourier 变换"一致。根据定理 3.1,这两个窗的宽度的积是

$$(2\Delta_{g_a})(2\Delta_{g_{1/4a}}) = 2 \qquad (3.1.15)$$

另一方面,考虑

$$H_{b,\omega}^{a}(\eta) := \frac{1}{2\pi} \hat{G}_{b,\omega}^{a}(\eta) = \left(\frac{e^{ib\omega}}{2\sqrt{\pi\alpha}}\right) e^{-ib\eta} g_{1/4a}(\eta-\omega)$$

(3.1.16)

有

$$\langle f, G_{b,\omega}^{a} \rangle = \langle \hat{f}, H_{b,\omega}^{a} \rangle \qquad (3.1.17)$$

这个恒等式表明,使用公式(3.1.10)中所定义的窗函数 $G_{b,\omega}^{a}$ 在$t=b$ 由研究一个模拟信号 $f(t)$ 得到的信息也能够使用在公式(3.1.16)中所定义的窗函数 $H_{b,\omega}^{a}$ 在频率 $\eta=\omega$ 的一个邻域由观察这个信号的谱 $\hat{f}(\eta)$ 得到。另外,时间窗 $G_{b,\omega}^{a}$ 宽度与频率窗 $H_{b,\omega}^{a}$ 的宽度的积还是

$$(2\Delta_{G_{b,\omega}^{a}})(2\Delta_{H_{b,\omega}^{a}}) = (2\Delta_{g_a})(2\Delta_{g_{1/4a}}) = 2 \qquad (3.1.18)$$

这两个窗的笛卡儿积

$$[b-\sqrt{a},b+\sqrt{a}]\times[\omega-\frac{1}{2\sqrt{a}},\omega+\frac{1}{2\sqrt{a}}] \tag{3.1.19}$$

称为矩形时间-频率窗。它通常在时间-频率域中的一小块表示一个信号怎样局部化。时间窗的宽度 $2\sqrt{a}$ 称为"时间-频率窗的宽度",而频率窗的宽度 $1/\sqrt{a}$ 称为"时间-频率窗的高度"。这个窗的位置展示在图 3.1.3 中。注意,时间-频率窗的宽度对于观察所有频率的谱是不变的。这就限制了 Gabor 变换对研究将在 3.3 节中讨论的非平常的高频与低频信号的应用。

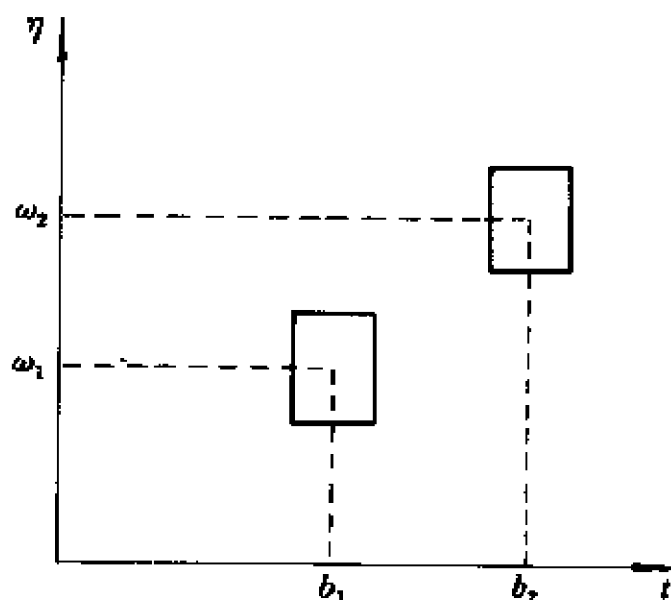


图 3.1.3 Gabor 窗

3.2 短时 Fourier 变换和测不准原理

Gabor 变换是以任何一个 Gaussian 函数 g_a 作为窗函数的一个窗口 Fourier 变换。由于种种原因,如计算的有效性或实现的方便性,另外的函数也能够代替 Gaussian 函数作为窗函数。对于一个非平凡函数 $w\in L^2(\mathbb{R})$ 为具备作为一个窗函数的资格,它必须满足要求

$$tw(t) \in L^2(\mathbb{R}) \tag{3.2.1}$$

所以还有 $|t|^{1/2}w(t)\in L^2(\mathbb{R})$。由公式(3.2.1)并且应用 Schwary 不等式于 $(1+|t|)^{-1}$ 与 $(1+|t|)w(t)$ 的积，显然还有 $w\in L^1(\mathbb{R})$。因此，根据定理 2.2，它的 Fourier 变换 $\hat{w}$ 是连续的。然而，虽然由 Parseval 恒等式得到 $\hat{w}$ 也属于 $L^2(\mathbb{R})$ 但它不必满足公式(3.2.1)，因此不可能是一个(频率)窗函数。由前节可知，一个 Gaussian 函数 g_a 的重要性是它的 Fourier 变换还是一个 Gaussian 函数，所以 g_a 与 $\hat{g}_a$ 可用于时间-频率局部化。

例子 3.2 像已经在公式(1.5.7)与(1.1.16)定义的一阶 B-样条

$$N_1(t) := \begin{cases} 1, & \text{对于 } 0 \leqslant t < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{3.2.2}$$

和 Haar 函数

$$\psi_1(t) = \psi_H(t) := \begin{cases} 1, & \text{对于 } 0 \leqslant t < 1/2 \\ -1 & \text{对于 } 1/2 \leqslant t < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \tag{3.2.3}$$

是窗函数，但他们的 Fourier 变换 $\hat{N}_1$ 与 $\hat{\psi}_1$ 不满足公式(3.2.1)，因此 $\hat{N}_1$ 与 $\hat{\psi}_1$ 不能用于时间-频率局部化。

证明 因为 N_1 与 ψ_1 都具有紧支撑，它们当然满足公式(3.2.1)。另一方面，由于定理 2.5 和定理 2.2(ii)，因为 N_1 与 ψ_1 不是连续的，所以 $\hat{N}_1$ 与 $\hat{\psi}_1$ 不可能属于 $L^1(\mathbb{R})$。结果，他们不满足公式(3.2.1)。 ●

通常，对于任一 $w\in L^2(\mathbb{R})$，它满足公式(3.2.1)，像在定义 1.2中那样，定义 w 的中心和半径为

$$x^* := \frac{1}{\|w\|_2^2}\int_{-\infty}^{\infty} t|w(t)|^2 dt \tag{3.2.4}$$

与

$$\Delta_w := \frac{1}{\|w\|_2}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(t-x^*)^2|w(t)|^2dt\right\}^{1/2} \quad (3.2.5)$$

人们还使用值 $2\Delta_w$ 作为窗函数 w 的宽度的度量。在信号分析中，如果 w 看作一个模拟信号本身，那么 Δ_w 就称为这个模拟信号的均方根持续时间，并且假定 $\hat{w}$ 也满足公式(3.2.1)，$\Delta_{\hat{w}}$ 称为它的均方根带宽。使用一个满足公式(3.2.1)的函数 w 作为窗函数，Gabor 变换公式(3.1.3)能够推广到一个 $f\in L^2(\mathrm{IR})$的任一"窗口 Fourier 变换"如下：

$$(\widetilde{\mathscr{G}}_b f)(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty}(e^{-i\omega t}f(t))\overline{w(t-b)}dt \quad (3.2.6)$$

因此，设

$$W_{b,\omega}(t) := e^{i\omega t}w(t-b) \quad (3.2.7)$$

则有

$$\begin{aligned}(\widetilde{\mathscr{G}}_b f)(\omega) &= \langle f, W_{b,\omega}\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{W_{b,\omega}(t)}dt \quad (3.2.8)\end{aligned}$$

所以$(\widetilde{\mathscr{G}}_b f)(\omega)$给出了 f 在时间窗

$$[x^* + b - \Delta_w, x^* + b + \Delta_w] \quad (3.2.9)$$

的局部信息。

现在，假定 w 的 Fourier 变换 $\hat{w}$ 也满足公式(3.2.1)。那么，可使用类似于公式(3.2.4)与(3.2.5)的公式确定窗函数 $\hat{w}$ 的中心 ω^* 与半径 $\Delta_{\hat{w}}$。设

$$V_{b,\omega}(\eta) := \frac{1}{2\pi}\hat{W}_{b,\omega}(\eta) \quad (3.2.10)$$

$$= \left(\frac{e^{ib\omega}}{2\pi}\right)e^{-ib\eta}\hat{w}(\eta - \omega)$$

这也是具有中心 $\omega^* + \omega$ 与半径等于 $\Delta_{\hat{w}}$ 的一个窗函数,用 Parseval 恒等式,我们有

$$(\widetilde{\mathscr{G}}_b f)(\omega) = \langle f, W_{b,\omega} \rangle = \langle \hat{f}, V_{b,\omega} \rangle \tag{3.2.11}$$

因此,$(\widetilde{\mathscr{G}}_b f)(\omega)$还给出了 f 在频率窗

$$[\omega^* + \omega - \Delta_{\hat{w}}, \omega^* + \omega + \Delta_{\hat{w}}] \tag{3.2.12}$$

中的局部谱信息,概括地说,选择任一 $w \in L^2(\mathbb{R})$ 使 w 与 $\hat{w}$ 都满足公式(3.2.1)以决定在公式(3.2.6)中的窗口 Fourier 变换,就有一个时间-频率窗

$$[x^* + b - \Delta_w, x^* + b + \Delta_w] \times [\omega^* + \omega - \Delta_{\hat{w}}, \omega^* + \omega + \Delta_{\hat{w}}] \tag{3.2.13}$$

它具有宽度 $2\Delta_w$(用时间窗的宽度决定)和不变的窗面积

$$4\Delta_w\Delta_{\hat{w}} \tag{3.2.14}$$

另外,时间-频率窗的宽度对于高频和低频局部化信号保持不变。

定义 3.3 如果 $w \in L^2(\mathbb{R})$ 选择得使 w 与它的 Fourier 变换 $\hat{w}$ 满足公式(3.2.1),那么使用 w 作为窗函数,在公式(3.2.6)中引入的窗口 Fourier 变换称为"短时 Fourier 变换(STFT)"。

像前边已看到的那样,因为 w 与 $\hat{w}$ 都满足公式(3.2.1),所以他们必须是连续函数。除 Gaussian 函数外,每个高于一阶的 B-样条函数能使用于定义一个 STFT。

例子 3.4 m 阶基数 B-样条

$$N_m(t) := \int_0^1 N_{m-1}(t - x)dx \tag{3.2.15}$$

其中 $m \geqslant 2$，正像在公式(1.5.7)中递推定义，而 N_1 在公式(3.2.2)中给出的那样，它定义一个 STFT 的一个窗函数。而且

$$\hat{N}_m(\omega) = \left(\frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega}\right)^m = e^{-im\omega/2}\left(\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right)^m \quad (3.2.16)$$

证明 因为 N_m 是 N_1 的 m 重卷积，并且 $\hat{N}_1(\omega) = (1 - e^{-i\omega})/i\omega$，那么在公式(3.2.16)中的结果由应用定理 2.7 得到。因此，显然 $\hat{N}_m$ 满足公式(3.2.1)。N_m 本身满足公式(3.2.1)是平凡的，因为它具有紧支撑。 ●

为了精确的时间-频率局部化，人们选择一个窗函数 w 使时间-频率窗具有充分小的面积 $4\Delta_w\Delta_{\hat{w}}$。我们已经在公式(3.1.18)中看到，如果 w 是任一个 Gaussian 函数 g_α，$\alpha > 0$，那么窗的面积是 2。所以，第一个需要回答的问题是，一个较小的面积是否能够实现。在下边著名的“测不准原理”定理中，将会看到，不可能求得一个窗函数具有小于或等于 Gaussian 函数作为窗函数时窗的面积。

定理 3.5 令 $w \in L^2(\mathbb{R})$ 的选择使 w 与其 Fourier 变换都满足公式(3.2.1)。那么

$$\Delta_w\Delta_{\hat{w}} \geqslant \frac{1}{2} \quad (3.2.17)$$

而且，等号成立，如且仅如

$$w(t) = ce^{iat}g_\alpha(t - b)$$

其中 $c \neq 0$，$\alpha > 0$ 和 $a, b \in \mathbb{R}$。

附注 在工程文献中，如果 w 看作一个模拟信号而 t 作为在时域中的变量，那么其频谱 $\hat{w}$ 的定义域可用频率(变量) $f = \omega/2\pi$ (Hz) 表示。因此，如果我们在 $\Delta_{\hat{w}}$ 的定义中用 $2\pi f$ 代替 ω，那么就引入了一个因子 2π。更确切地说，如像在工程文献中常用的，设

$$
\begin{cases}
\Delta_t = \Delta_w \\
\Delta_f = \dfrac{1}{2\pi}\Delta_{\hat{w}}
\end{cases} \tag{3.2.18}
$$

测不准原理公式(3.2.17)现在叙述为

$$
\Delta_t \Delta_f \geqslant \frac{1}{4\pi} \tag{3.2.19}
$$

其中如且仅如信号 w 是一个 Gaussian 函数时，等号成立。

为了有助于定理 3.5 的证明，需要下述结果。

引理 3.6 令 f 是一个非平凡的几乎处处可微函数，使 $(1+|x|)f(x)$ 与 $f'(x)$ 都属于 $L^2(\mathbb{R})$。那么

$$
\left|\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\overline{f'}(x)dx\right|^2 \leqslant \left\{\int_{-\infty}^{\infty}|xf(x)|^2dx\right\}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f'(x)|^2dx\right\} \tag{3.2.20}
$$

而且，如且仅如 $f(x)$ 是一个 Gaussian 函数时，等号成立。

证明 公式(3.2.20)中的不等式是 Schwary 不等式的一个平凡应用。现在，如果公式(3.2.20)中的等式成立，那么由此得到

$$
\begin{cases}
\mathrm{Re}\,xf(x)\,\overline{f'}(x) = |xf(x)f'(x)| \\
|xf(x)| = 2\alpha|f'(x)|
\end{cases} \tag{3.2.21}
$$

对于某个正常数 α 成立。(这里，正如后边将会看到的，另一种可能性 $\mathrm{Re}\,xf(x)\overline{f'}(x) = |xf(x)f'(x)|$ 不予考虑，因为 f 一定属于 $L^2(\mathbb{R})$。还有，$\alpha \neq 0$ 由假定 f 是一个 $L^2(\mathbb{R})$ 中的一个非平凡函数得到。)由公式(3.2.21)中的第二个等式，我们有

$$
xf(x) = 2\alpha f'(x)e^{i\theta(x)}
$$

对于某个实值函数 $\theta(x)$ 成立。于是公式(3.2.21)中的第一个恒等

式推出

$$-xf(x)\overline{f'(x)}\geqslant 0$$

这样

$$-2a|f'(x)|^2e^{i\theta(x)}\geqslant 0$$

这又可推出 $e^{i\theta(a)}=-1$。因此推断出

$$xf(x)=-2af'(x)$$

所以 f' 是连续的，并且

$$f(x)=ce^{-x^2/4a}$$

对于某个常数 $c\neq 0$ 成立。即，f 是一个在公式(2.2.9)中定义的 Gaussian 函数的非常数倍。 ●

在转到定理 3.5 的证明之前，首先注意

$$\mathrm{Re}\,xf(x)\overline{f'(x)}=\frac{1}{2}x\frac{d}{dx}|f(x)|^2 \tag{3.2.22}$$

并且，如果函数 $f(x)$，$f'(x)$ 与 $xf(x)$ 的每一个都属于 $L^2(\mathbb{R})$，那么

$$\lim_{|x|\to\infty}x|f(x)|^2=0 \tag{3.2.23}$$

公式(3.2.23)成立的理由是，在我们的假定之下，有

$$\frac{d}{dx}(x|f(x)|^2)\in L^1(\mathbb{R})$$

定理 3.5 的证明 首先假定 w 与 $\hat{w}$ 的中心在原点。然后，依次应用定理 2.2(iii)，Parseval 恒等式，公式(3.2.20)，(3.2.22)及(3.2.23)，我们有

$$(\Delta_w\Delta_{\hat{w}})^2=\frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty}t^2|w(t)|^2dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2|\hat{w}(\omega)|^2d\omega\right)}{\|w\|_2^2\|\hat{w}\|_2^2} \tag{3.2.24}$$

$$=\frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty}t^2|w(t)|^2dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{w'}(\omega)|^2d\omega\right)}{\|w\|_2^2\|\hat{w}\|_2^2}$$

$$=\frac{2\pi\|xw(x)\|_2^2\|w'\|_2^2}{2\pi\|w\|_2^4}$$

$$\geqslant\frac{1}{\|w\|_2^4}\left|\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}xw(x)\overline{w'}(x)dx\right|^2$$

$$=\frac{1}{\|w\|_2^4}\cdot\left|\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{d}{dx}|w(x)|^2dx\right|^2$$

$$=\frac{1}{\|w\|_2^4}\left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|w(x)|^2dx\right)^2=\frac{1}{4}$$

而且，根据引理 3.6，前边推导中唯一的一个不等式变成等式，如且仅如 w 是一个 Gaussian 函数。

通常，如果 w 与 $\hat{w}$ 的中心分别在 $t=b$ 与 $\omega=a$，那么用一个简单的变量变换，上述推导表明 $\Delta_w\Delta_{\hat{w}}=\frac{1}{2}$ 的唯一条件是

$$w(t)=ce^{iat}g_\alpha(t-b)$$

其中 $\alpha>0$ 且 $c\neq0$。 ●

因此，上节中导入的 Gabor 变换是具有最小时间-频率窗的 STFT。在某些应用中，必须选取一个较大的窗，以便得到其它的希望性质。例如，例子 3.4 中引入的二阶或较高阶的 B-样条有助于计算与实现的有效性。Gabor 变换不具有的最重要的性质是附加的条件：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0 \tag{3.2.25}$$

其中 ψ 是窗函数。这个性质给我们为引入一个膨胀(或尺度)参数而额外增加一个自由度,以便使时间-频率窗是灵活的。由于这个膨胀参数,下节讨论的时间局部化积分变换将称为"积分小波变换"(IWT),并且定义 IWT 的任意一个窗函数将称为一个"基小波"。

在结束本节前,我们由其 STFT 值为复原任一有限能量的信号推导一个公式。

定理 3.7 令 $w \in L^2(\mathbb{R})$ 使选择 $\|w\|_2 = 1$ 和 w 与 $\hat{w}$ 都满足公式(3.2.1)。还有,令 $W_{b,\omega}(t)$ 如公式(3.2.7)中所定义的。那么

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle f, W_{b,\omega} \rangle \overline{\langle g, W_{b,\omega} \rangle} \, db d\omega = 2\pi \langle f, g \rangle \tag{3.2.26}$$

对于任何 $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ 成立。

证明 对于任一 $f \in L^2(\mathbb{R})$,令 $\check{f}$ 表示 f 的 Fourier 逆变换,即 $\check{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(-x)$。然后,用 Parseval 恒等式和公式(3.2.6),我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} (\widetilde{\mathscr{G}}_b f)(\omega) \overline{(\widetilde{\mathscr{G}}_b g)(\omega)} d\omega \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} (\widetilde{\mathscr{G}}_b f)^{\vee}(x) \overline{(\widetilde{\mathscr{G}}_b g)^{\vee}(x)} dx \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{w(t-b)} \, \overline{g(t)} |w(t-b)| dt \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} |w(t-b)|^2 dt
\end{aligned}$$

因而,由假定 $\|w\|_2 = 1$ 得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} < f, W_{b,\omega} > \overline{< g, W_{b,\omega} >} dbd\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (\widetilde{\mathscr{G}}_b f)(\omega)\overline{(\widetilde{\mathscr{G}}g)(\omega)} dbd\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\overline{g(t)}\,|w(t-b)|^2 dbdt$$

$$= 2\pi < f, g >$$

●

选择 g 是 Gaussian 函数 $g_a(\cdot - x)$ 且让 $a\to 0^+$，我们得出下述结果。

推论 3.8 令 w 满足在定理 3.7 中的假设并且令 $f\in L^2(\mathbb{R})$。那么在 f 连续的每个点 x

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [e^{i\omega x}(\widetilde{\mathscr{G}}_b f)(\omega)] w(x-b) d\omega db \tag{3.2.27}$$

3.3 积分小波变换

我们用任何 STFT 分析一个信号时看到，时间-频率窗是严格的。在这个意义上讲观察任何一个具有中心频率 $\omega^* + \omega$ 的频带（或倍频程）

$$[\omega^* + \omega - \Delta_{\hat{w}}, \omega^* + \omega + \Delta_{\hat{w}}]$$

它的宽度是不变的。因为频率与每单位时间的周期数成正比例，取一个窄的时间窗以便更精确地确定高频现象，而取一个宽的时间窗以便更充分地分析低频特性。因此，STFT 对于分析具有很高与很低频率的信号是不适合的。另一方面，定义在下面的关于某个基小波的积分小波变换(IWT)提供了一个可调的时间-频率窗，当观察高频现象时它自动变窄，而当研究低频环境时它自动变宽。

定义 3.9 如果 $\psi\in L^2(\mathbb{R})$ 满足“容许性”条件：

$$C_\psi := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \qquad (3.3.1)$$

那么 ψ 称为是一个"基小波"。关于每一个基小波 ψ，在 $L^2(\mathbb{R})$ 上的积分小波变换(IWT)定义为

$$(W_\psi f)(b,a) := |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi(\frac{t-b}{a})} dt, \quad f \in L^2(\mathbb{R}) \qquad (3.3.2)$$

其中 $a,b \in L^2(\mathbb{R})$ 而 $a \neq 0$。

附注 此外，如果 ψ 与 $\hat{\psi}$ 都满足公式(3.2.1)，那么基小波 ψ 提供了一个用 $4\Delta_\psi \cdot \Delta_{\hat{\psi}}$ 给出的有限面积的时间-频率窗。另外，在这个附加的假定之下，由此得到 $\hat{\psi}$ 是一个连续函数，所以，公式(3.3.1)中 C_ψ 的有限性推出 $\hat{\psi}(0)=0$，或者等价地

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \qquad (3.3.4)$$

这就是 ψ 称为"小波"的原因。在本节的后面会看到，得到 IWT 的逆时需要容许性条件。

通过设定

$$\psi_{b,a}(t) := |a|^{-\frac{1}{2}} \psi(\frac{t-b}{a}) \qquad (3.3.5)$$

公式(3.3.2)中定义的 IWT 能够写为

$$(W_\psi f)(b,a) = \langle f, \psi_{b,a} \rangle \qquad (3.3.5)$$

在下述讨论中，让我们假定 ψ 与 $\hat{\psi}$ 都满足公式(3.2.1)。然后，如果窗函数 ψ 的中心与半径分别用 t^* 与 Δ_ψ 给出，那么函数 $\psi_{b,a}$ 是中心在 $b+at^*$ 且半径等于 $a\Delta_\psi$ 的一个窗函数。因此，公式(3.3.5)表示的 IWT 给出了一个模拟信号 f 具有一个时间窗

$$[b + at^* - a\Delta_\psi, b + at^* + a\Delta_\psi] \tag{3.3.6}$$

的局部信息。这个窗对于小的 a 值变窄而对于大的 a 值变宽。

下面，考虑

$$\frac{1}{2\pi}\hat{\psi}_{b;a}(\omega) = \frac{|a|^{-\frac{1}{2}}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt \tag{3.3.7}$$

$$= \frac{a|a|^{-\frac{1}{2}}}{2\pi}e^{-ib\omega}\hat{\psi}(a\omega)$$

并且假定窗函数 $\hat{\psi}$ 的中心与半径分别用 ω^* 与 $\Delta_{\hat{\psi}}$ 给出。然后，令

$$\eta(\omega) := \hat{\psi}(\omega + \omega^*) \tag{3.3.8}$$

就有中心在原点且半径等于 $\Delta_{\hat{\psi}}$ 的一个窗函数。现在，由公式(3.3.5)和(3.3.7)，并且应用 Parseval 恒等式，有

$$(W_\psi f)(b,a) = \frac{a|a|^{-\frac{1}{2}}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{ib\omega}\overline{\eta\left(a\left(\omega - \frac{\omega^*}{a}\right)\right)}d\omega \tag{3.3.9}$$

因为很明显窗函数 $\eta\left(a\left(\omega-\frac{\omega^*}{a}\right)\right)=\eta(a\omega-\omega^*)=\hat{\psi}(a\omega)$ 具有由 $\frac{1}{a}\Delta_{\hat{\psi}}$ 给出的半径，公式(3.3.9)中的表示式说明，除了具有一个倍数 $a|a|^{-1/2}/2\pi$ 与一个线性相位位移 $e^{ib\omega}$ 之外，IWT $W_\psi f$ 还给出了 $\hat{f}$ 具有一个频率窗

$$\left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{1}{a}\Delta_{\hat{\psi}}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{a}\Delta_{\hat{\psi}}\right] \tag{3.3.10}$$

的局部信息。在下面的讨论中，$\hat{\psi}$ 的中心 ω^* 假定是正的。这样一来，我们可以把这个窗认为具有中心频率 ω^*/a 且带宽是 $2\Delta_{\hat{\psi}}/a$ 的一个频带。这个表示法的重要性是，比与尺度 a 无关。即

$$\frac{\text{中心频率}}{\text{带宽}} = \frac{\omega^*/a}{2\Delta_{\hat{\psi}}/a} = \frac{\omega^*}{2\Delta_{\hat{\psi}}} \tag{3.3.11}$$

因此，如果这个频率变量是中心的常数 a^{-1} 倍，那么具有由公式(3.3.10)给出的适配带通滤波器有性质：中心频率与带宽的比与中心频率的位置无关。这就称为“常数-Q 滤波”。

现在，如果把 ω^*/a 作为频率变量 ω，那么就可以把 t-ω 平面作为时间-频率平面。因此，由公式(3.3.6)中的时间窗和公式(3.3.10)中的频率窗。我们在 t-ω 平面上具有一个矩形时间-频率窗

$$[b + at^* - a\Delta_\psi, b + at^* + a\Delta_\psi] \times \left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{1}{a}\Delta_{\hat{\psi}}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{a}\Delta_{\hat{\psi}}\right] \tag{3.3.12}$$

而宽度为 $2a\Delta_\psi$(用时间窗的宽度决定)。因此，对于检测高频现象(即小的$a>0$)，窗会自动变窄；而对于检测低频特性(即大的$a>0$)窗会自动变宽(参看图 1.2.1)。

下面，将导出由任一有限能量信号的 IWT 的值重构这个信号的一个公式。为了完整性，我们首先允许尺度 a 是负的，然后集中注意力于 a 的正值，以便把 IWT 应用到时间-频率分析。

定理 3.10 令 ψ 是一个基小波，它定义一个 IWT W_ψ。那么

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[(W_\psi f)(b,a)\overline{(W_\psi g)(b,a)}\right]\frac{da}{a^2}db = C_\psi < f,g > \tag{3.3.13}$$

对于所有 $f,g\in L^2(\mathbb{R})$ 成立。进而，对任何 $f\in L^2(\mathbb{R})$ 和 f 连续的点 $x\in\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[(W_\psi f)(b,a)\right]\psi_{b,a}(x)\frac{da}{a^2}db \tag{3.3.14}$$

其中 $\psi_{b,a}$ 在公式(3.3.4)中已定义。

证明 应用 Parseval 恒等式和公式(3.3.7),并且使用记号

$$\begin{cases} F(x) := \hat{f}(x)\hat{\psi}(ax) \\ G(x) := \hat{g}(x)\hat{\psi}(ax) \end{cases} \tag{3.3.15}$$

则有

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}[(W_\psi f)((b,a)\ \overline{(W_\psi g)(b,a)}db \\
&= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\ \overline{\psi(\frac{t-b}{a})}dt\int_{-\infty}^{\infty}\overline{g(s)}\psi(\frac{s-b}{a})ds\right\}db \\
&= \frac{a^2}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\overline{\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{-ibx}dx}\right\}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(y)e^{-iby}dy\right\}db \\
&= \frac{a^2}{2\pi|a|}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{G}(b)\ \overline{\hat{F}(b)}db\right\} \\
&= \frac{a^2}{2\pi|a|}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{G}(x)F(x)dx
\end{aligned}$$

其中为得到最后一个等式,再次使用了 Parseval 恒等式。因此,把公式(3.3.15)代入上述表示式,在$(-\infty,\infty)$对 da/a^2 积分,并且考虑公式(3.3.1)的 C_ψ 的定义,得到

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}[(W_\psi f)(b,a)\ \overline{(W_\psi g)(b,a)}]db\right\}\frac{da}{a^2} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\hat{f}(x)\ \overline{\hat{g}(x)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\hat{\psi}(ax)|^2}{|a|}da\right\}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\hat{f}(x)\ \overline{\hat{g}(x)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\hat{\psi}(y)|^2}{|y|}dy\right\}dx
\end{aligned} \tag{3.3.16}$$

$$= C_\psi \frac{1}{2\pi} < \hat{f}, \hat{g} > = C_\psi < f, g >$$

而且，如果 f 在 x 是连续的，那么使用 Gaussian 函数 $g_a(\cdot - x)$ 作为函数 g，并且允许上面的 a 趋向于 0，我们得到

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \lim_{a \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [(W_\psi f)(b, a)$$

$$\times \overline{< g_a(\cdot - x), \psi_{b;a} >}] \frac{da}{a^2} db$$

$$= \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [(W_\psi f)(b, a)] \psi_{b;a}(x) \frac{da}{a^2} db$$

这就完成了定理的证明。 ●

在信号分析中，我们只考虑正频率 ω。因此，如果频率变量 ω 是膨胀参数 a 的倒数的一个正常数倍，如 $\omega = \omega^* / a$（其中 $\hat{\psi}$ 的中心 ω^* 总假定是正的），那么，我们必须只考虑 a 的正值。所以，由 f 的 IWT 重构 f，只允许使用值 $(W_\psi f)(b, a)$，$a > 0$。正如人们预期的那样，基小波 ψ 对此可能必须有一点限制。附加在 ψ 上的条件是

$$\int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega} d\omega$$

$$= \frac{1}{2} C_\psi < \infty \qquad (3.3.17)$$

定理 3.11 令 ψ 是一个满足公式(3.3.17)的基小波，那么

$$\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^{\infty} (W_\psi f)(b, a) \overline{(W_\psi g)(b, a)} db \right] \frac{da}{a^2} = \frac{1}{2} C_\psi < f, g > \qquad (3.3.18)$$

对于所有 $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ 成立。而且，对任何 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 和在 f 连续的

点 $x\in\mathbb{R}$，

$$f(x)=\frac{2}{C_\psi}\int_0^\infty\left[\int_{-\infty}^{\infty}(W_\psi f)(b,a)\psi_{b;a}(x)db\right]\frac{da}{a^2} \tag{3.3.19}$$

其中 $\psi_{b;a}$ 在公式(3.3.4)中已定义。

注意，为了公式(3.3.18)的左边对于所有 $f,g\in L^2(\mathbb{R})$ 等于 $C\langle f,g\rangle$，假定公式(3.3.17)是必要的，并且还必须有 $C=\frac{1}{2}C_\psi$。

定理 3.11 的证明

在假定公式(3.3.17)之下，容易验证

$$\int_0^\infty\frac{|\hat{\psi}(ax)|^2}{a}da=\int_0^\infty\frac{|\hat{\psi}(y)|^2}{y}dy,\quad x\neq 0 \tag{3.3.20}$$

因此，像在公式(3.3.16)中同样的推导(只是除了，对于 da/a^2 的积分是在$(0,\infty)$，而不是$(-\infty,\infty)$，我们得到公式(3.3.18)。公式(3.3.19)的证明和定理 3.10 中公式(3.3.14)的证明完全相同。

●

3.4 二进小波和反演

在信号分析中，有时需要把(正)频率轴划分为邻接的频带(或倍频程)。为了计算的有效性和讨论的方便性，只考虑"二进划分"，即

$$(0,\infty)=\bigcup_{j=-\infty}^{\infty}(2^j\Delta_{\hat{\psi}},2^{j+1}\Delta_{\hat{\psi}}) \tag{3.4.1}$$

其中 $\Delta_{\hat{\psi}}>0$ 是基小波 ψ 的 Fourier 变换的半径。这里，再次假定 $\hat{\psi}$ 满足公式(3.2.1)。注意，对于任何一个基小波 ψ，ψ 相位位移 α 等价于 $\hat{\psi}$ 的频率向前移相同的 α，即

$$\psi^\alpha(t)=e^{i\alpha t}\psi(t)\Longleftrightarrow\hat{\psi}^\alpha(\omega)=\hat{\psi}(\omega-\alpha) \tag{3.4.2}$$

因此，因为 $\Delta_{\hat{\varphi}}=\Delta_{\varphi}$ 与 $\Delta_{\hat{\psi}}=\Delta_{\psi}$，不失其一般性，总可以假定 $\hat{\psi}$ 的中心在 $\omega=3\Delta_{\hat{\psi}}$。这样，我们有

$$\left(\frac{\omega^*}{a_j}-\frac{1}{a_j}\Delta_{\hat{\psi}},\frac{\omega^*}{a_j}+\frac{1}{a_j}\Delta_{\hat{\psi}}\right]=\left(2^{j+1}\Delta_{\hat{\psi}},2^{j+2}\Delta_{\hat{\psi}}\right] \tag{3.4.3}$$

只要

$$a_j=\frac{1}{2^j},\quad j\in\mathbb{Z} \tag{3.4.4}$$

公式(3.4.3)中描述的频带的中心频率用

$$\omega_j:=\frac{\omega^*}{a_j}=\frac{3\Delta_{\hat{\psi}}}{a_j}=3\times2^j\Delta_{\hat{\psi}} \tag{3.4.5}$$

给出。所以，使用 ω^*/a 表示频率变量 ω，其中 $a>0$ 是膨胀(或尺度)参数。实际上，公式(3.4.1)中邻接的并的确给出(正)频率域 $(0,\infty)$ 的一个划分。

本节，将研究任一有限能量信号 f(即任一 $f\in L^2(\mathbb{R})$ 由其积分小波变换 $(W_\psi f)(b,a)$，只在离散的频率集合：

$$\{\omega_j=3\times2^j\Delta_{\hat{\psi}}:j\in\mathbb{Z}\}$$

(或者只使用尺度 $a=a_j:=\frac{1}{2^j},j\in\mathbb{Z}$)，重新恢复这个信号的问题。这个问题有解，人们自然期望基小波比公式(3.3.1)中的容许性条件有更多的限制。

定义 3.12 一个函数 $\psi\in L^2(\mathbb{R})$ 称为是二进小波，如果存在两个正常数 A 与 B，而有 $0<A\leqslant B<\infty$，使

$$A\leqslant\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2\leqslant B \tag{3.4.6}$$

几乎处处成立。

公式(3.4.6)中的条件称为加于 ψ 上的“稳定性”条件。为说明这个术语的用途，利用函数反射的记号公式(2.3.9)，以便引入下述“规范”IWT：

$$(W_j^* f)(b) := 2^{j/2}(W_\psi f)\left(b, \frac{1}{2^j}\right) = 2^j\left(f * \overline{\psi^-(2^j \cdot)}\right)(b) \tag{3.4.7}$$

于是，可看到公式(3.4.6)等价于

$$A\|f\|_2^2 \leqslant \sum_{j=-\infty}^{\infty} \|W_j^* f\|_2^2 \leqslant B\|f\|_2^2, \quad f \in L^2(\mathbb{R}) \tag{3.4.8}$$

对于同样的常数 A 与 B 成立。事实上，根据 Parseval 恒等式和引理 2.16 的(2.3.10)中的第一个等式，公式(3.4.8)中这组不等式能够写为

$$A\|\hat{f}\|_2^2 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)\,\bar{\hat{\psi}}(2^{-j}\omega)|^2 d\omega \leqslant B\|\hat{f}\|_2^2$$

这等价于

$$A \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left|\frac{g(x)}{\|g\|_2}\hat{\psi}(2^{-j}x)\right|^2 dx \leqslant B, \quad g \in L^2(\mathbb{R}) \tag{3.4.9}$$

选取 $g/\|g\|_2$ 是 Gaussian 函数 $g_\alpha(\cdot - \omega)$ 并且允许 $\alpha \to 0^+$，就可看到公式(3.4.9)产生公式(3.4.6)。因为公式(3.4.6)显然推出公式(3.4.9)，所以这两组不等式是等价的。

下面看到 ψ 的稳定性条件隐含任一二进小波 ψ 必须是一个基小波。

定理 3.13 令 ψ 满足稳定性条件公式(3.4.6)。那么 ψ 是满足

$$A\ln 2 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega} d\omega \leqslant B\ln 2 \tag{3.4.10}$$

的一个基小波。而且，如果公式(3.4.6)中的 A 与 B 相同，那么

$$C_\psi := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = 2A\ln 2 \tag{3.4.11}$$

证明 首先注意

$$\int_1^2 \frac{|\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2}{\omega} d\omega = \int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}} \frac{|\hat{\psi}(x)|^2}{x} dx$$

因此，公式(3.4.6)中用 ω 除每一项并且在区间(1,2)上积分，我们有

$$A\ln 2 \leqslant \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega \leqslant B\ln 2$$

同样，用 $-\omega$ 除并且在(−2，−1)上积分，得到

$$A\ln 2 \leqslant \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega} d\omega \leqslant B\ln 2$$

●

稳定性条件是由任一 $f\in L^2(\mathbb{R})$ 的 IWT 的值 $(W_\psi f)(b,2^{-j})$，$j\in\mathbb{Z}$，重新复原这个信号的手段。人们采取的方法是引入另外的二进小波 ψ^*，通过研究它的 Fourier 变换

$$\hat{\psi}^*(\omega) := \frac{\hat{\psi}(\omega)}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^{-k}\omega)|^2} \tag{3.4.12}$$

来定义 ψ^*。由于这个函数 ψ^*，由公式(3.4.7)得到，对于任一 $f\in L^2(\mathbb{R})$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(W_j^{\psi}f)(b)\{2^j\psi^*(2^j(x-b))\}db \qquad (3.4.13)$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(W_j^{\psi}f)^{\wedge}(\omega)\hat{\psi}^*(2^{-j}\omega)e^{ix\omega}d\omega$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\overline{\hat{\psi}}(2^{-j}\omega)\hat{\psi}^*(2^{-j}\omega)e^{ix\omega}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{ix\omega}d\omega = f(x)$$

其中，依次使用了公式 $h_1 * h_2 = \mathscr{F}^{-1}(\hat{h}_1\hat{h}_2)$，(3.4.7)，引理 2.16 与公式(3.4.12)。这就导出下述"二进对偶"的记号。

定义 3.14 一个函数 $\tilde{\psi}\in L^2(\mathbb{R})$ 称为是二进小波 ψ 的一个二进对偶，如且仅如每一个 $f\in L^2(\mathbb{R})$ 能够展为

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(W_j^{\psi}f)(b)\{2^j\tilde{\psi}(2^j(x-b))\}db \qquad (3.4.14)$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty}2^{3j/2}\int_{-\infty}^{\infty}(W_{\psi}f)(b,\frac{1}{2^j})\tilde{\psi}(2^j(x-b))db$$

因此，在公式(3.4.13)中，我们建立了下述结果。

定理 3.15 令 ψ 是一个二进小波。那么，它的 Fourier 变换用公式(3.4.12)给出的函数 ψ^* 是 ψ 的一个二进对偶。而且，ψ^* 也是具有

$$\frac{1}{B}\leqslant\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\hat{\psi}^*(2^{-j}\omega)|^2\leqslant\frac{1}{A} \quad 几乎处处 \qquad (3.4.15)$$

的一个二进小波。

注意，一个给定的二进小波 ψ 的二进对偶也许不是唯一的。非唯一性的讨论推迟到 3.6 节。这取决于下述特征化的结果。

定理 3.16 令 ψ 是一个二进小波并且 $\tilde{\psi}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 中满足

$$\operatorname*{ess\,sup}_{-\infty<x<\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\hat{\tilde{\psi}}(2^{-j}x)|^2<\infty \tag{3.4.16}$$

的任一函数。那么 $\tilde{\psi}$ 是 ψ 的一个二进对偶，如且仅如下述等式满足

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\overline{\hat{\psi}(2^{-j}\omega)}\,\hat{\tilde{\psi}}(2^{-j}\omega)=1\quad\text{几乎处处} \tag{3.4.17}$$

证明 像在公式(3.4.13)中同样的推导，注意 $\tilde{\psi}$ 是 ψ 的一个二进对偶，如且仅如对于任一 $f\in L^2(\mathbb{R})$，我们有

$$\hat{f}(\omega)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\,\overline{\hat{\psi}(2^{-j}w)}\,\hat{\tilde{\psi}}(2^{-j}\omega)\quad\text{几乎处处} \tag{3.4.18}$$

其中根据公式(3.4.16)假设和二进小波 ψ 的定义，无穷级数是几乎处处收敛的。显然，公式(3.4.17)与(3.4.18)是等价的。 ●

3.5 框架

在前节中，通过选择膨胀参数 a 是 $a_j:=2^{-j}$，$j\in\mathbb{Z}$，把(正)频率轴划分为邻接的频带 $(2^j\Delta_{\hat{\psi}},2^{j+1}\Delta_{\hat{\psi}}]$，$j\in\mathbb{Z}$，而平移参数允许在整个 $\mathbb{R}$ 上变化。这样，考虑一个 $f\in L^2(\mathbb{R})$ 的 IWT 的半离散信息，即

$$(W_\psi f)\left(b,\frac{1}{2^j}\right),\quad b\in\mathbb{R},j\in\mathbb{Z}$$

为了计算的有效性，让我们还离散化平移参数 b，限制 b 为抽样点

$$b_{j,k}:=\frac{k}{2^j}b_0,\quad j,k\in\mathbb{Z} \tag{3.5.1}$$

的离散集。其中 $b_0>0$ 是一个固定常数，称为"抽样速率"。因此，由引入的记号

$$\psi_{b_0;j,k}(t) := \psi_{b_{j,k};a_j}(t) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j t - kb_0) \quad (3.5.2)$$

($\psi_{b;a}$ 的定义见公式(3.3.4))，任一 $f\in L^2(\mathbb{R})$ 的 IWT 的值，将考虑用

$$(W_\psi f)(b_{j,k},a_j) = \langle f,\psi_{b_0;j,k}\rangle, \quad j,k\in\mathbb{Z} \quad (3.5.3)$$

给出。类似于在前节的半离散建立，还对从公式(3.5.3)中任一 $f\in L^2(\mathbb{R})$ 的 IWT 的值重新复原这个信号感兴趣。这个重构的"稳定性"条件是存在正常数 A 与 B，且 $0<A\leqslant B<\infty$，使

$$A\|f\|_2^2 \leqslant \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} |\langle f,\psi_{b_0;j,k}\rangle|^2 \leqslant B\|f\|_2^2$$

$$f\in L^2(\mathbb{R}) \quad (3.5.4)$$

换句话说，函数 ψ 的稳定性条件要求，ψ 生成 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个框架而有抽样速率 b_0，如下。

定义 3.17 一个函数 $\psi\in L^2(\mathbb{R})$ 称为生成 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个框架 $\{\psi_{b_0;j,k}\}$ 而有抽样速率 b_0，如果公式(3.5.4)对于某些称为框架界的正常数 A 与 B 成立。如果 $A=B$，那么这个框架称为是一个紧框架。

在稳定性条件公式(3.5.4)之下，即在 ψ 生成一个框架之下，我们确信，任何 $f\in L^2(\mathbb{R})$ 能由它在公式(3.5.3)中的 IWT 值重新恢复。为此，让我们考虑在 $L^2(\mathbb{R})$ 上的线性算子 T，定义为

$$Tf := \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \langle f,\psi_{b_0;j,k}\rangle \psi_{b_0;j,k}, f\in L^2(\mathbb{R})$$

$$(3.5.5)$$

由公式(3.5.4)中的稳定性条件，显然 T 是一个一一有界线性算子。事实上，因为公式(3.5.4)中的下界，T 还把 $L^2(\mathbb{R})$ 映射到它的

值域上，并且用开映射原理，它的逆 T^{-1} 是有界的。根据我们的安排，我们甚至能断定下述简单的论断。对于任何 $g=Tf$，其中 $f\in L^2(\mathbb{R})$，因为

$$<Tf,f>=\sum_{j,k\in\mathbb{Z}}|<f,\psi_{b_0;j,k}>|^2 \tag{3.5.6}$$

我们有

$$\begin{aligned}A\|T^{-1}g\|_2^2=A\|f\|_2^2&\leqslant<Tf,f>\\&=<g,T^{-1}g>\\&\leqslant\|g\|_2\|T^{-1}g\|_2\end{aligned}$$

所以

$$\|T^{-1}g\|_2\leqslant\frac{1}{A}\|g\|_2$$

或者 $\|T^{-1}\|\leqslant A^{-1}$。因此，每一个 $f\in L^2(\mathbb{R})$ 能够由它在公式(3.5.3)中的 IWT 的值，使用公式

$$f=T^{-1}Tf=\sum_{j,k\in\mathbb{Z}}<f,\psi_{b_0;j,k}>T^{-1}\psi_{b_0;j,k} \tag{3.5.7}$$

重构。设

$$\psi_{b_0}^{j,k}:=T^{-1}\psi_{b_0;j,k},\quad j,k\in\mathbb{Z} \tag{3.5.8}$$

则重构公式(3.5.7)对于所有 $f,g\in L^2(\mathbb{R})$ 可以写为

$$\begin{cases}<f,g>=\sum_{j,k\in\mathbb{Z}}<f,\psi_{b_0;j,k}><\psi_{b_0}^{j,k},g>\\f=\sum_{j,k\in\mathbb{Z}}<f,\psi_{b_0;j,k}>\psi_{b_0}^{j,k}\end{cases} \tag{3.5.9}$$

这可以称$\{\widetilde{\psi}_{b_0}^{j,k}\}$为框架$\{\psi_{b_0;j,k}\}$的"对偶"。然而,重构公式(3.5.7)或(3.5.9)是不实用的,除非有某些对偶的知识。很不幸,通常对偶$\{\widetilde{\psi}_{b_0}^{j,k}\}$不能像$\{\psi_{b_0;j,k}\}$用$\psi$生成的同样方法用某个$\widetilde{\psi}\in L^2(\mathbb{R})$生成。下节,我们转向这个题目的讨论。

下面,将看到,一个框架可以不是一个线性无关族。

例子 3.18 令ψ_1是公式(3.2.3)所定义的 Haar 函数并且考虑抽样速率$b_0=\frac{1}{3}$。那么,线性相关族$S:=\{\psi_{1,\frac{1}{3};j,k}: j,k\in\mathbb{Z}\}$是$L^2(\mathbb{R})$的一个框架。

证明 让我们使用记号

$$\gamma_j=\begin{cases}1, & 对偶数\ j\in\mathbb{Z}\\ 2, & 对奇数\ j\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

并且把族S分解为三个邻接并的子族:

$$S_1=\{\psi_{1;j,k}(x)=2^{j/2}\psi_1(2^jx-k): j,k\in\mathbb{Z}\}$$

$$S_2=\{2^{j/2}\psi_1(2^jx-k+\frac{\gamma_j}{3}): j,k\in\mathbb{Z}\}$$

与

$$S_3=\{2^{j/2}\psi_1(2^jx-k-\frac{\gamma_j}{3}): j,k\in\mathbb{Z}\}$$

因为ψ_1是 Haar 函数,S_1已经是$L^2(\mathbb{R})$的一个正交基(见 1.5 节,更详细地见第五章与第六章)。因此,S是一个线性相关族。还容易验证,S_2与S_3都是正交族,所以(广义)Bessel 不等式适用(对于三角多项式的 Bessel 不等式见公式(2.4.14))。结果,有

$$\|f\|_2^2=\sum_{j,k\in\mathbb{Z}}|\langle f,\psi_{1;j,k}\rangle|^2$$

$$\leqslant \sum_{j,k\in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{1,\frac{1}{3};j,k}\rangle|^2$$

$$= \|f\|_2^2 + \sum_{s\in S_2} |\langle f, s\rangle|^2$$

$$+ \sum_{s\in S_3} |\langle f, s\rangle|^2$$

$$\leqslant 3\|f\|_2^2$$ ●

因此，稳定性条件公式(3.5.4)比如下定义的 ψ 生成一个 Riesz 基的要求弱。

定义 3.19 一个函数 $\psi\in L^2(\mathbb{R})$ 说是生成一个 Riesz 基(或无约束基) $\{\psi_{b_0;j,k}\}$ 而有抽样速率 b_0，如果下述两个性质满足：

(i) 线性张成

$$\langle \psi_{b_0;j,k} : j,k \in \mathbb{Z} \rangle \tag{3.5.10}$$

在 $L^2(\mathbb{R})$ 中是稠密的；

(ii) 存在正常数 A 与 B，而有 $0<A\leqslant B<\infty$，使

$$A\|\{c_{j,k}\}\|_{l^2}^2 \leqslant \left\| \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} c_{j,k}\psi_{b_0;j,k} \right\|_2^2 \leqslant B\|\{c_{j,k}\}\|_{l^2}^2 \tag{3.5.11}$$

对于所有 $\{c_{j,k}\}\in l^2(\mathbb{Z}^2)$ 成立。这里 A 与 B 称为是 $\{\psi_{b_0;j,k}\}$ 的 Riesz 界。

如果 ψ 生成具有抽样速率 $b_0=1$ 的一个 Riesz 基，那么 ψ 称为是一个 $\mathscr{R}$-函数(见定义 1.4)。

附注 本书中，总是使用记号

$$\psi_{j,k}(x) := \psi_{1;j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^jx - k) \tag{3.5.12}$$

这个记号不应与公式(3.3.4)中引入的记号 $\psi_{b;a}$ 混淆。

下述结果阐明一个框架与一个 Riesz 基之间的不同。

定理 3.20 令 $\psi\in L^2(\mathbb{R})$和 $b_0>0$。那么下述两个叙述是等价的。

(i) $\{\psi_{b_0;j,k}\}$是 $L^2(\mathbb{R})$的一个 Riesz 基。

(ii) $\{\psi_{b_0;j,k}\}$是 $L^2(\mathbb{R})$的一个框架，并且还是一个 l^2 线性无关族，在这个意义上讲，如果$\sum c_{j,k}\psi_{b_0;j,k}=0$ 且$\{c_{j,k}\}\in l^2$，那么 $c_{j,k}=0$。而且 Riesz 界和框架界是相同的。

证明 由公式(3.5.11)可见任何 Riesz 基是 l^2 线性无关的。让$\{\psi_{b_0;j,k}\}$是具有 Riesz 界 A 与 B 的一个 Riesz 基，并且考虑“矩阵算子”

$$M := [\gamma_{l,m;j,k}]_{(l,m),(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$$

其中项值用

$$\gamma_{l,m;j,k} := \langle \psi_{b_0;l,m}, \psi_{b_0;j,k} \rangle \tag{3.5.13}$$

定义，根据公式(3.5.11)，有

$$A\|\{c_{j,k}\}\|_{l^2}^2 \leqslant \sum_{l,m,j,k} c_{l,m}\gamma_{l,m;j,k}\bar{c}_{j,k} \leqslant B\|\{c_{j,k}\}\|_{l^2}^2$$

所以 M 是正定的。用

$$M^{-1} := [\mu_{l,m;j,k}]_{(l,m)(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$$

表示 M 的逆，意思是

$$\sum_{r,s}\mu_{l,m;r,s}\gamma_{r,s;j,k} = \delta_{l,j}\delta_{m,k}, \quad l,m,j,k\in\mathbb{Z} \tag{3.5.14}$$

与

$$B^{-1}\|\{c_{j,k}\}\|_{l^2}^2 \leqslant \sum_{l,m;j,k} c_{l,m}\mu_{l,m;j,k}\bar{c}_{j,k}$$
$$\leqslant A^{-1}\|\{c_{j,k}\}\|_{l^2}^2, \{c_{j,k}\}\in l^2 \tag{3.5.15}$$

都满足。这就允许我们引入

$$\psi^{l,m}(x) := \sum_{j,k} \mu_{l,m;j,k} \psi_{b_0;j,k}(x) \qquad (3.5.16)$$

显然，$\psi^{l,m} \in L^2(\mathbb{R})$；并且由公式(3.5.13)与(3.5.14)得到

$$< \psi^{l,m}, \psi_{b_0;j,k} > = \delta_{l,j} \ \delta_{m,k}, \quad l,m,j,k \in \mathbb{Z}$$

这是指$\{\psi^{l,m}\}$是 $L^2(\mathbb{R})$关于$\{\psi_{b_0;j,k}\}$的对偶基。而且，由公式(3.5.14)与(3.5.15)，我们得出结论

$$< \psi^{l,m}, \psi^{j,k} > = \mu_{l,m;j,k}$$

并且$\{\psi^{l,m}\}$的 Riesz 界是 B^{-1} 和 A^{-1}。特别是，对于任一 $f \in L^2(\mathbb{R})$，我们可以写出

$$f(x) = \sum_{j,k} < f, \psi_{b_0;j,k} > \psi^{j,k}(x)$$

并且

$$B^{-1} \sum_{j,k} | < f, \psi_{b_0;j,k} > |^2 \leqslant \| f \|_2^2$$

$$\leqslant A^{-1} \sum_{j,k} | < f, \psi_{b_0;j,k} > |^2 \qquad (3.5.17)$$

因为很明显，公式(3.5.17)等价于(3.5.4)，所以我们就建立了叙述(i)稳含着叙述(ii)。

为了建立相反的论断，不得不依赖泛函分析的两个基本结果，即 Banach-Steinhaus 定理和开映射定理。很不幸，这已超出本书的范围。这里只给出一个很粗的轮廓而不作任何细节的讨论。回顾公式(3.5.5)，如果$\{\psi_{b_0;j,k}\}$是 $L^2(\mathbb{R})$的一个框架，那么对于任一 $g \in L^2(\mathbb{R})$和$f = T^{-1}g$，我们有

$$g(x) = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle \psi_{b_0;j,k}(x)$$

另外，根据$\{\psi_{b_0;j,k}\}$的 l^2 线性无关性，这个表示式是唯一的。它还表明，在使用这个"基"$\{\psi_{b_0;j,k}\}$表示 $L^2(\mathbb{R})$的函数中，级数

$$\sum_{j,k} c_{j,k}\psi_{b_0;j,k}(x)$$

在 $L^2(\mathbb{R})$中收敛，如且仅如系数$\{c_{j,k}\}$属于 l^2。那么，如上所述，Banach Steinhaus 定理和开映射定理能够应用于推断$\{\psi_{b_0;j,k}\}$是 $L^2(\mathbb{R})$的一个 Riesz 基。 ●

通过证明，如果 $\psi \in L^2(\mathbb{R})$生成 $L^2(\mathbb{R})$的一个框架，那么它必定是一个二进小波，来结束本节。

定理 3.21 令 $\psi \in L^2(\mathbb{R})$生成 $L^2(\mathbb{R})$的一个框架而有框架界 A 与 B 和抽样速率 $b_0>0$。那么它的 Fourier 变换满足：

$$b_0A \leqslant \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2 \leqslant b_0B \quad \text{几乎处处} \tag{3.5.18}$$

部分证明 令 $f \in L^2(\mathbb{R})$。引入记号

$$\tau := \frac{2\pi}{b_0}$$

并且应用 Parseval 恒等式于$\langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle$和圆周的情况，我们有

$$\sum_{j,k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle|^2$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{2^j}{4\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(2^j\omega) \overline{\hat{\psi}(\omega)} e^{ikb_0\omega} d\omega \right|^2$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{2^j\tau^2}{4\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{f}(2^j(\omega - l\tau)) \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \overline{\hat{\psi}(\omega + l\tau)} \right] e^{i\frac{k2\pi\omega}{\tau}} d\omega \right|^2$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{2^j}{2\pi b_0} \int_0^{\tau} \left| \sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{f}(2^j(\omega + l\tau)) \overline{\hat{\psi}(\omega + l\tau)} \right|^2 d\omega$$

因此，框架（或稳定性）条件公式(3.5.4)变成

$$A \| \hat{f} \|_2^2 \leqslant \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{2^j}{b_0} \int_0^{\tau} \left| \sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{f}(2^j(x + l\tau)) \overline{\hat{\psi}(x + l\tau)} \right|^2 dx$$

$$\leqslant B \| \hat{f} \|_2^2$$

现在，如果关于 j 的求和是一个有限和，如 $-M \leqslant j \leqslant M$，那么，对于任一 $\omega \in \mathbb{R}$ 和充分小的 $\varepsilon > 0$，选取

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \chi_{[\omega-\varepsilon, \omega+\varepsilon]}(x)$$

在上述不等式中很容易地得到

$$A \leqslant \sum_j \frac{1}{b_0} \cdot \frac{2^j}{2\varepsilon} \int_{2^{-j}(\omega-\varepsilon)}^{2^{-j}(\omega+\varepsilon)} |\hat{\psi}(x)|^2 dx \leqslant B$$

因此，公式(3.5.18)中的不等式可以通过取 $\varepsilon \to 0^+$ 得到。很不幸，关于 j 的和不是有限和。然而，因为任何有限截断保留上界，公式(3.5.18)中的第二个不等式当然成立。为推导在公式(3.5.18)中的第一个不等式，关于 j 的和的“尾部”在把上述论证应用于有限和之前，必须非常仔细地估计。这里省略技术细节。 ●

3.6 小波级数

我们像在前节中研究 IWT 的离散时间尺度抽样一样继续时间-频率分析的讨论。为简化讨论，我们只考虑抽样速率 $b_0 = 1$ 并

使用像在公式(3.5.12)中引入的记号 $\psi_{j,k}=\psi_{1;j,k}$。我们进一步限制我们的注意力于 $\mathscr{R}$-函数 ψ，在这个意义上，像在定义 3.19 中那样，$\{\psi_{j,k}\}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$的一个 Riesz 基。因此，分别用定理 3.20 与定理 3.21，$\{\psi_{j,k}\}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$的一个框架并且 ψ 是一个二进小波。令 $\{\psi^{j,k}\}$ 是如公式(3.5.13)中定义的关于 Riesz 基 $\{\psi_{j,k}\}$ 的对偶基。当 $\{\psi_{j,k}\}$ 认为是 $L^2(\mathbb{R})$的一个框架时，我们可以把 $\psi^{j,k}=\psi_1^{j,k}=T^{-1}\psi_{1;j,k}$ 认为是该框架的对偶，如公式(3.5.7)-(3.5.8)中讨论的那样。

有两个很重要的 $\mathscr{R}$-函数的子类，它们构成本书中我们研究的中心主题。它们是“半正交小波”和更多限制的“正交小波”，在下面定义。对于这两类函数，十分容易特征化他们的“对偶”。

定义 3.22 令 $\psi\in L^2(\mathbb{R})$是一个如公式(3.5.12)中生成 $\{\psi_{j,k}\}$ 的 $\mathscr{R}$-函数。那么

(i) ψ 称为是一个正交小波，如果 $\{\psi_{j,k}\}$ 满足正交性条件：

$$<\psi_{j,k},\psi_{l,m}>=\delta_{j,l}\delta_{k,m},\quad j,k,l,m\in\mathbb{Z} \tag{3.6.1}$$

(ii) ψ 称为是一个半正交小波，如果 $\{\psi_{j,k}\}$ 满足条件：

$$<\psi_{j,k},\psi_{l,m}>=0,\quad j\neq l,j,k,l,m\in\mathbb{Z} \tag{3.6.2}$$

显然，一个正交小波在

$$\psi^{j,k}=\psi_{j,k},\qquad j,k\in\mathbb{Z}$$

的意义上是“自对偶”的。为决定半正交小波的对偶，首先讨论下述正交性的等价叙述。

定理 3.23 对于任一函数 $\phi\in L^2(\mathbb{R})$，下述叙述是等价的：

(i) $\{\phi(x-k): k\in\mathbb{R}\}$ 是在意义

$$<\phi(\cdot-k),\phi(\cdot-l)>=\delta_{k,l}\quad k,l\in\mathbb{Z} \tag{3.6.3}$$

上的规范正交族。

(ii) ϕ 的 Fourier 变换 $\hat{\phi}$ 满足

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ijx} |\hat{\phi}(x)|^2 dx = \delta_{j,0} \qquad j \in \mathbb{Z} \quad (3.6.4)$$

(iii) 恒等式

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(x + 2\pi k)|^2 = 1 \qquad (3.6.5)$$

对于几乎所有 x 成立。

证明 因为 $|\hat{\phi}(x)|^2$ 属于 $L^1(\mathbb{R})$，由引理 2.24 得到，定义函数 G 的无穷级数

$$G(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(x + 2\pi k)|^2 \qquad (3.6.6)$$

几乎处处收敛于 G，并且 $G \in L^1(0, 2\pi)$。现在，对于每个 $j \in \mathbb{Z}$，G 的第 j 个 Fourier 系数是

$$\begin{aligned} c_j(G) &:= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ijx} G(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-ijx} |\hat{\phi}(x + 2\pi k)|^2 dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} e^{-ijy} |\hat{\phi}(y)|^2 dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ijx} |\hat{\phi}(x)|^2 dx \end{aligned}$$

这就建立了(ii)与(iii)的等价性。(i)与(ii)的等价性在 $j=k-l$ 时，直接用 Parseval 恒等式得到，即

$$<\phi(\cdot - k), \phi(\cdot - l)> = \int_{-\infty}^{\infty} (x - j)\overline{\phi(x)} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(x)e^{-ijx}\overline{\hat{\phi}(x)}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ijx}|\hat{\phi}(x)|^2dx$$

比在上面定理中正交性性质稍弱一点的性质是“Riesz(或无约束)条件”,这在下面研究。

定理 3.24 对于任一函数$\phi\in L^2(\mathbb{R})$和常数$0<A\leqslant B<\infty$,下述两个叙述是等价的:

(i) $\{\phi(\cdot-k);k\in\mathbb{Z}\}$满足具有 Riesz 界 A 与 B 的 Riesz 条件,即,对于任一$\{c_k\}\in l^2$

$$A\|\{c_k\}\|_{l^2}^2\leqslant\|\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\phi(\cdot-k)\|_2^2\leqslant B\|\{c_k\}\|_{l^2}^2 \tag{3.6.7}$$

(ii) ϕ的 Fourier 变换$\hat{\phi}$满足

$$A\leqslant\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\hat{\phi}(x+2\pi k)|^2\leqslant B \quad 几乎处处 \tag{3.6.8}$$

证明 对于任一$\{c_k\}\in l^2$,令$C(\omega)$表示它的符号,即:

$$C(\omega):=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{-ik\omega} \tag{3.6.9}$$

然后,根据 Parseval 恒等式,我们可以写出

$$\|\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\phi(\cdot-k)\|_2^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|C(\omega)\hat{\phi}(\omega)|^2d\omega \tag{3.6.10}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)}|C(\omega)\hat{\phi}(\omega)|^2d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} |C(x) \hat{\phi}(x + 2\pi k)|^2 dx$$

让我们使用在公式(2.5.4)中引入的记号

$$\Phi_{|\hat{\phi}|^2}(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(x + 2\pi k)|^2 \qquad (3.6.11)$$

然后，考虑

$$g(\omega) = \frac{|C(\omega)|^2}{\|C\|_{L^2(0,2\pi)}}$$

并且求助于公式(1.1.7)的 Parseval 恒等式

$$\|\{c_k\}\|_{l^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |C(\omega)|^2 d\omega = \|C\|_{L^2(0,2\pi)}^2$$

由公式(3.6.10)得到，公式(3.6.7)能表示为

$$A \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \Phi_{|\hat{\phi}|^2}(x) dx \leqslant B \qquad (3.6.12)$$

显然，公式(3.6.8)隐含公式(3.6.12)。为看到公式(3.6.12)也隐含公式(3.6.8)，我们再次使用 Gaussian 函数 $g_\alpha(x-\omega)$ 代替 $g(x)$ 并且让 α 趋向于 0。 ●

借助于上述两个定理，现在能够用公式表示半正交小波的对偶。

定理 3.25 令 $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ 是一个半正交小波，并且通过它的 Fourier 变换定义 $\tilde{\psi}$

$$\hat{\tilde{\psi}}(\omega) := \frac{\hat{\psi}(\omega)}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\omega + 2\pi k)|^2} \qquad (3.6.13)$$

那么，在意义

$$<\psi_{j,k},\tilde{\psi}_{l,m}> = \delta_{j,l}\delta_{k,m}, \quad j,k,l,m \in \mathbb{Z} \quad (3.6.14)$$

上，$\tilde{\psi}$是ψ的对偶，其中

$$\tilde{\psi}_{l,m}(x) := 2^{l/2}\tilde{\psi}(2^l x - m) \quad (3.6.15)$$

换句话说，关于$\{\psi_{j,k}\}$的对偶基$\{\psi^{j,k}\}$用$\psi^{j,k}=\tilde{\psi}_{j,k}$给出。

证明 因为ψ是一个半正交小波，$\{\psi_{j,k}\}$是$L^2(\mathbb{R})$的一个 Riesz 基而且有 Riesz 界 A 与 B。因此，考虑在公式(3.5.11)中形如$c_{j,k}=c_k\delta_{j,0}$，$\{c_k\}\in l^2$的序列$\{c_{j,k}\}\in l^2(\mathbb{Z}^2)$，我们看到公式(3.6.7)对于$\psi$代替$\phi$成立。根据定理 3.24，公式(3.6.13)中的分母是几乎处处有界的，界用公式(3.6.8)中的 A 与 B 给出。这就推出公式(3.6.13)中定义的$\tilde{\psi}$属于$L^2(\mathbb{R})$并且满足

$$\tilde{\psi}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\psi(x-k), \quad \{a_k\} \in l^2 \quad (3.6.16)$$

其中

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikx}\frac{1}{\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\hat{\psi}(x+2\pi j)|^2}dx \quad (3.6.17)$$

结果，由于ψ是一个半正交小波，所以公式(3.6.2)中的假设，带有(3.6.15)中的记号，直接得到

$$<\psi_{j,k},\tilde{\psi}_{l,m}> = 0, \quad j \neq l; \quad j,k,l,m \in \mathbb{Z}$$

对于$j=l$，设$p=k-m$，由公式(3.6.13)得到

$$
\begin{aligned}
&< \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{j,m} > \\
&= 2^j \int_{-\infty}^{\infty} \psi(2^j x - k) \overline{\tilde{\psi}(2^j x - m)} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y - p) \overline{\tilde{\psi}(y)} dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip\omega} \hat{\psi}(\omega) \overline{\hat{\tilde{\psi}}(\omega)} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} e^{-ip\omega} \Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(\omega + 2\pi k) \overline{\hat{\tilde{\psi}}(\omega + 2\pi k)} \Big] d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} e^{-ip\omega} d\omega = \delta_{p,0} = \delta_{k,m}
\end{aligned}
$$

这就完成了定理的证明。 ●

上述结果还暗示怎样把一个半正交小波变为一个正交小波。实际上,通过设定

$$
\hat{\psi}^{\perp}(\omega) = \frac{\hat{\psi}(\omega)}{\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\omega + 2\pi k)|^2 \right)^{1/2}} \tag{3.6.18}
$$

$\psi^{\perp}$ 的对偶 $\tilde{\psi}^{\perp}$ 用

$$
\hat{\tilde{\psi}}^{\perp}(\omega) = \frac{\hat{\psi}^{\perp}(\omega)}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}^{\perp}(\omega + 2\pi k)|^2} = \hat{\psi}^{\perp}(\omega)
$$

给出,即 $\tilde{\psi}^{\perp} = \psi^{\perp}$,或者 $\psi^{\perp}$ 是自对偶的。

公式(3.6.18)通常称为规范"正交化过程"。然而,如果 ψ 是任一个非半正交小波的 $\mathscr{R}$-函数,这个正交化过程在构造正交小波中是没有作用的。事实上,像在 1.4 节已经讨论的那样,存在不

具有对偶的 $\mathscr{R}$-函数，在此意义上，关于 Risez 基 $\{\psi_{j,k}\}$ 的对偶基 $\psi^{j,k}$ 对某个 $\tilde{\psi}\in L^2(\mathbb{R})$ 不是用 $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}$ 给出，其中使用了在公式(3.6.15)中的记号。因此每一个 Riesz 基是一个框架，所以框架的这个对偶也可以不用单个的 $L^2(\mathbb{R})$ 函数生成。这就导致下述"小波"的定义。

定义 3.26 一个 $\mathscr{R}$-函数称为是一个 $\mathscr{R}$-小波（或小波），如果它具有一个对偶 $\tilde{\psi}\in L^2(\mathbb{R})$，在此意义上，公式(3.5.12)与(3.6.15)所定义的 $\{\psi_{j,k}\}$ 与 $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}$ 满足对偶性关系公式(3.6.14)。

因为对偶性关系公式(3.6.14)是可交换的，所以一个小波 ψ 的对偶 $\tilde{\psi}$ 本身是一个以 ψ 作为它的对偶的小波。即，除自对偶的正交小波外，当考虑小波时，总是考虑小波对。

如果 ψ 是具有对偶 $\tilde{\psi}$ 的一个小波，那么根据 Riesz 基的定义，每个 $f\in L^2(\mathbb{R})$ 能够写为

$$f(x)=\sum_{j,k\in\mathbb{Z}}c_{j,k}\psi_{j,k}(x)=\sum_{j,k\in\mathbb{Z}}d_{j,k}\tilde{\psi}_{j,k}(x)\quad(3.6.19)$$

这两个(双)无限级数称为"小波级数"并且在 $L^2(\mathbb{R})$ 中是收敛的(见定义 3.19)。根据对偶性关系公式(3.6.14)，得到

$$\begin{cases}c_{j,k}=\langle f,\tilde{\psi}_{j,k}\rangle\\ d_{j,k}=\langle f,\psi_{j,k}\rangle\end{cases}$$

因此，我们有下述方法由它们的积分小波变换的离散抽样来重构有限能量信号。

定理 3.27 令 ψ 是具有对偶 $\tilde{\psi}$ 的一个小波。对于每个 $f\in L^2(\mathbb{R})$ 使用 ψ 与 $\tilde{\psi}$ 作为基小波，考虑它的 IWT 在 $(b,a)=(\frac{k}{2^j},\frac{1}{2^j})$ 的值，$j,k\in\mathbb{Z}$，即：

$$\begin{cases} d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = (W_\psi f)(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j}) \\ c_{j,k} = \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle = (W_{\tilde{\psi}} f)(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j}) \end{cases} \tag{3.6.20}$$

那么，使用在公式(3.6.19)中两个小波级数之一，f 能够由 $\{d_{j,k}\}$ 或 $\{c_{j,k}\}$ 重构。而且，任何两个 $L^2(\mathbb{R})$ 函数的内积也能够由他们的 IWT 的类似离散抽样，使用公式

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \langle \tilde{\psi}_{j,k}, g \rangle \tag{3.6.21}$$

复原。

现在转到 3.4 节中引入的二进小波的二进对偶的讨论。首先，必须强调，二进小波在 $\mathscr{R}$-小波的意义上不必要是小波，并且二进对偶一般不是对偶小波。

令 ψ 是一个具有 Riesz 界 A 与 B 的一个半正交小波。我们由定理 3.25 的证明已经看到，$\hat{\psi}$ 对于同样的界 A 与 B 满足不等式

$$A \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(x + 2\pi k)|^2 \leqslant B, \quad 几乎处处 \tag{3.6.22}$$

当 $\{\psi_{j,k}\}$ 看作具有抽样速率 $b_0 = 1$ 的 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个框架时，由定理 3.20 与 3.21 可得到，$\hat{\psi}$ 对同样常数 A 与 B 仍满足条件：

$$A \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2 \leqslant B, \quad 几乎处处 \tag{3.6.23}$$

公式(3.6.22)与(3.6.23)中的结论允许我们引入两个 $L^2(\mathbb{R})$ 函数 ψ^* 与 $\psi^\sharp$，而 Fourier 变换用

$$\begin{cases} \hat{\psi}^*(\omega) := \dfrac{\hat{\psi}(\omega)}{\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^{-k}\omega)|^2} \\ \hat{\psi}^\circ(\omega) := \dfrac{\hat{\psi}(\omega)}{\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\omega + 2\pi k)|^2} \end{cases} \tag{3.6.24}$$

给出。令 $\psi^\perp$ 是使用公式(3.6.18)用 ψ 的正交化得到的正交小波。那么 $\psi^\perp$ 是具有 Riesz 界 $A=B=1$ 的一个 $\mathscr{R}$-函数。因此，由定理 3.20 与 3.21 可得到

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}^\perp(2^{-j}\omega)|^2 = 1, \quad \text{几乎处处} \tag{3.6.25}$$

因为 $\overline{\hat{\psi}}\hat{\psi}^\circ = |\hat{\psi}^\perp|^2$，我们还有

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \overline{\hat{\psi}(2^{-j}\omega)}\hat{\psi}^\circ(2^{-j}\omega) = 1, \quad \text{几乎处处} \tag{3.6.26}$$

所以，由于事实：

$$\operatorname*{ess\,sup}_{-\infty<x<\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}^\circ(2^{-j}x)|^2 < \infty \tag{3.6.27}$$

这是在所有 $\psi^\circ(2^j x)$，$j\in\mathbb{Z}$，之中相互正交的一个推论，由定理3.16可得到，ψ° 是 ψ 的一个二进对偶。因此，借助于定理 3.15，我们断定 ψ^* 与 ψ° 都是 ψ 的二进对偶。因为公式(3.6.24)中的分母实际上完全不同，人们不能期望这两个二进对偶是相同的，除非 ψ 是一个正交小波。

第四章　基数样条分析

在使用基小波，如二进小波、二进对偶小波、框架(frame)以及 $\mathscr{R}$-小波(简称为小波)时，对于时间-频率分析和其它的应用，有许多重点必须考虑。它们是：时间-频率窗的大小、计算的复杂性和有效性，实现的简单性，基小波的光滑与对称性以及逼近阶。构造小波的基本方法之一包括"基数 B-样条函数"的使用。基数 B-样条函数或许对于软件或硬件实现都是最有效的具有小支撑的最简单函数。另外，它们有一个很有趣的性质，称为"全正性"，控制着"样条曲线"的零交叉个数和形状。这个题目将在第六章中讨论，在那里，我们将会看到，使用一个基数 B-样条平移的一种(有限)线性组合产生由测不准原理控制的有"近似最小"的时间-频率窗。本章专心研究基数样条函数与它的基本性质，重点是计算、图形显示、离散数据的实时(或在实直线上)处理和小波的构造。

4.1　基数样条空间

当谈到"基数样条函数"时，我们的意思是"具有等距单重节点的多项式样条函数"。为了方便，我们首先把所有整数的集合 $\mathbb{Z}$ 作为"节点序列"。在公式(1.5.8)中，π_n 表示不超过 n 次的所有代数多项式的集，$C^n = C^n(\mathbb{R})$ 表示使 $f, f', \cdots f^{(n)}$ 处处连续的所有函数的集，而 $C = C^0$ 及 C^{-1} 是在 2.1 节开始所定义的分段连续函数的空间。

定义 4.1　对于每个正整数 m，m 阶且具有节点序列 $\mathbb{Z}$ 的基数样

条空间 S_m 是这样所有函数 $f\in C^{m-2}$ 的集合，f 对任一区间 $(k,k+1)$，$k\in\mathbb{Z}$，属于 π_{m-1}，即

$$f|_{[k,k+1)}\in\pi_{m-1},\quad k\in\mathbb{Z}$$

分段常数函数的空间 S_1 是容易理解的。使用最方便的基是 $\{N_1(x-k):k\in\mathbb{Z}\}$，其中 N_1 是在(3.2.2)中定义的$[0,1)$上的特征函数。为给出 S_m 的一个基，$m\geqslant 2$，让我们首先考虑限制函数 $f\in S_m$ 于区间$[-N,N]$所组成的空间 $S_{m,N}$，其中 N 是正整数。换句话说，可以把 $S_{m,N}$ 作为函数 $f\in S_m$ 的子空间，使 f 的约束

$$f|_{(-\infty,-N+1)}\quad 和\quad f|_{[N-1,\infty)}$$

是 π_{m-1} 中的多项式。这个子空间容易特征化。实际上，对于 $S_{m,N}$ 中的一个任意函数，通过置 $p_{m,j}:=f|_{[j,j+1)}\in\pi_{m-1}$，$j=-N,\cdots,N-1$，由事实 $f\in C^{m-2}$，我们有

$$(p_{m,j}^{(l)}-p_{m,j-1}^{(l)})(j)=0,\quad l=0,\cdots,m-2;\quad m\geqslant 2$$

即，考虑在节点序列 $\mathbb{Z}$ 上 $f^{(m-1)}$ 的"跃变"，也就是

$$\begin{aligned} c_j&=p_{m,j}^{(m-1)}(j+0)-p_{m,j-1}^{(m-1)}(j-0) \\ &:=\lim_{\varepsilon\to 0^+}[f^{(m-1)}(j+\varepsilon)-f^{(m-1)}(j-\varepsilon)] \end{aligned}\tag{4.1.1}$$

f 的相邻多项式部分有恒等关系

$$p_{m,j}(x)=p_{m,j-1}(x)+\frac{c_j}{(m-1)!}(x-j)^{m-1}\tag{4.1.2}$$

因此，引入记号

$$\begin{cases} x_+:=\max(0,x) \\ x_+^{m-1}:=(x_+)^{m-1},\quad m\geqslant 2 \end{cases}\tag{4.1.3}$$

由公式(4.1.2)得到，对于所有 $x\in[-N,N]$

$$f(x)=f|_{[-N,-N+1)}(x)+\sum_{j=-N+1}^{N-1}\frac{c_j}{(m-1)!}(x-j)_+^{m-1} \tag{4.1.4}$$

这个公式对于每个 $f\in S_{m,N}$ 成立，其中 c_j 由公式(4.1.1)给出。因此，$m+2N-1$ 个函数的集合

$$\{1,\cdots,x^{m-1},(x+N-1)_+^{m-1},\cdots,(x-N+1)_+^{m-1}\} \tag{4.1.5}$$

是 $S_{m,N}$ 的一个基。这个集合由单项式和"截幂"组成。因此局限于区间$[-N,N]$，所以在公式(4.1.5)中的单项式 $1,\cdots,x^{m-1}$ 还能用截幂：

$$(x+N+m-1)_+^{m-1},\cdots,(x+N)_+^{m-1} \tag{4.1.6}$$

代替。即，由一个单个函数 x_+^{m-1} 的整数平移产生的截幂的下述集合

$$\{(x-k)_+^{m-1}:k=-N-m+1,\cdots,N-1\}$$

还是 $S_{m,N}$ 的一个基。由下述原因，这个基比公式(4.1.5)中的基更具有吸引力。首先，每个函数$(x-j)_+^{m-1}$对 j 的左边变为零；其次，公式(4.1.7)中的所有基函数都由与 N 无关的单个函数 x_+^{m-1} 生成。而且，由于

$$S_m=\bigcup_{N=1}^{\infty}S_{m,N} \tag{4.1.7}$$

由此得到公式(4.1.7)中的基还能够扩展为无穷维空间 S_m 的一个"基"$\mathscr{T}$，通过简单地取公式(4.1.7)中基的并；即，我们有

$$\mathscr{T}:=\{(x-k)_+^{m-1}:k\in\mathbb{Z}\} \tag{4.1.8}$$

不过，在处理无限维空间时必须更仔细。在本书中，因为主要涉及

Hilbert 空间，人们特别感兴趣的是在 $L^2(\mathbb{R})$ 中的基数样条。不幸的是，在 $\mathscr{S}$ 中没有一个单个函数具有作为 $L^2(\mathbb{R})$ 中一个函数的资格，而且事实上，每个 $(x-k)_+^{m-1}$ 在 $x\to+\infty$ 时相当快地增长到无穷。为由 $\mathscr{S}_N$ 建立 $L^2(\mathbb{R})$ 函数，必须克服 $(x-k)_+^{m-1}$ 的多项式增长。允许以向量空间进行的唯一运算是（有限）线性组合。例如，取导数是不允许的，但是取"差分"肯定是允许的。因此差分的效果与求导在克服多项式增长方面是同样的，所以将考虑差分。更确切地说，将使用"向后差分"，其递推定义是

$$\begin{cases}(\Delta f)(x) := f(x) - f(x-1) \\ (\Delta^n f)(x) := (\Delta^{n-1}(\Delta f))(x), \quad n = 2,3,\cdots\end{cases} \tag{4.1.9}$$

注意，正像 m 阶微分算子一样，任何 $m-1$ 次或小于 $m-1$ 次多项式的 m 阶差分恒等于零，即

$$\Delta^m f = 0, \quad f \in \pi_{m-1} \tag{4.1.10}$$

这就促使形成下述定义。

定义 4.2 令 $M_1 := N_1$ 是像公式(3.2.2)中定义的 $[0,1)$ 的特征函数，并且对于 $m\geqslant 2$，令

$$M_m(x) := \frac{1}{(m-1)!}\Delta^m x_+^{m-1} \tag{4.1.11}$$

由 M_m 的定义可得到，M_m 是公式(4.1.8)中基函数的一种线性组合。事实上，容易证明

$$M_m(x) = \frac{1}{(m-1)!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}(x-k)_+^{m-1} \tag{4.1.12}$$

由公式(4.1.10)得到，对于所有 $x\geqslant m$，$M_m(x)=0$。因为对于 $x<0$，$M_m(x)$ 显然变为零，所以有 $\operatorname{supp} M_m\subseteq[0,m]$。如果再作一点艰苦的工作，还能得到精确

$$\text{supp } M_m = [0,m] \tag{4.1.13}$$

所以，M_m 肯定属于 $L^2(\mathbb{R})$。但 M_m 的整数平移的集

$$\mathscr{B} := \{M_m(x-k) : k \in \mathbb{Z}\} \tag{4.1.14}$$

是 S_m 的一个“基底”吗？再次转到 $S_{m,N}$，由公式(4.1.5)或(4.1.7)，$S_{m,N}$ 的维数是 $m+2N-1$。现在，使用支撑性质公式(4.1.13)，集：

$$\{M_m(x-k) : k = -N-m+1,\cdots,N-1\} \tag{4.1.15}$$

中的每个函数在区间 $[-N,N]$ 上是非平凡的，并且，$M_m(x-k)$，对于 $k<N-m+1$ 或 $k>N-1$，在 $[-N,N]$ 上恒为零。由于能够证明公式(4.1.15)是线性无关集，人们可得到 $S_{m,N}$ 的另外基底。所以，类似于公式(1.4.8)，如果我们取公式(4.1.15)中 $N=1,2,\cdots$，基底的并，就得出在公式(4.1.14)中的 $\mathscr{B}$。比起公式(4.1.8)中 $\mathscr{T}$ 来，$\mathscr{B}$ 的一个优点是现在能讨论样条级数

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k M_m(x-k) \tag{4.1.16}$$

而不存在关于收敛性方面的太多烦恼。事实上，对于每个固定的 $x \in \mathbb{R}$，因为 M_m 具有紧支撑，除了无穷级数公式(4.1.16)中的有限项外，其它项全部是零。

如前所述，我们主要对属于 $L^2(\mathbb{R})$ 的那些基数样条感兴趣，即：$S_m \cap L^2(\mathbb{R})$。令 V_0^m 表示它的 $L^2(\mathbb{R})$ 闭包。即，V_0^m 是包括 $S_m \cap L^2(\mathbb{R})$ 的 $L^2(\mathbb{R})$ 的最小闭子空间。由于 M_m 具有紧支撑，我们看到 $\mathscr{B} \subset V_0^m$。在下节中，还将证明 $\mathscr{B}$ 是 V_0^m 的一个 Riesz 基（或无约束基）。

至此，只考虑了具有节点序列 $\mathbb{Z}$ 的基数样条。更一般地说，还要考虑具有节点序列 $2^{-j}\mathbb{Z}$，$j \in \mathbb{Z}$ 的基数样条空间 S_m^j。因为，当 $j_1 < j_2$ 时，具有节点序列 $2^{-j_1}\mathbb{Z}$ 的一个样条函数还是具有节点序

列 $2^{-j}\mathbb{Z}$ 的一个样条函数，我们有一个(双向无限)的基数样条空间的嵌套序列

$$\cdots \subset S_m^{-1} \subset S_m^0 \subset S_m^1 \subset \cdots$$

其中 $S_m^0 := S_m$。类似于 V_0^m 的定义，我们令 V_m^j 表示 $S_m^j \cap L^2(\mathbb{R})$ 的 $L^2(\mathbb{R})$ 闭包。因此，有 $L^2(\mathbb{R})$ 的基数样条闭子空间的一个嵌套序列。

$$\cdots \subset V_{-1}^m \subset V_0^m \subset V_1^m \subset \cdots \tag{4.1.17}$$

很明显，这个子空间的嵌套序列满足

$$\begin{cases} \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})}\left(\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_m{}^j\right) = L^2(\mathbb{R}) \\ \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j^m = \{0\} \end{cases} \tag{4.1.18}$$

而且，一旦证明：$\mathscr{B}$ 是 V_0^m 的一个 Riesz 基，那么，对于任何 $j\in\mathbb{Z}$，集

$$\{2^{j/2}M_m(2^jx-k) : k\in\mathbb{Z}\} \tag{4.1.19}$$

还是 V_j^m 的一个 Riesz 基并且具有和像 $\mathscr{B}$ 同样的 Riesz 界。

4.2 B-样条及其基本性质

我们现在转到公式(1.5.7)中引入的 m 阶基数 B-样条的定义

$$N_m(x) := (N_{m-1} * N_1) = \int_0^1 N_{m-1}(x-t)dt, \quad m \geqslant 2 \tag{4.2.1}$$

其中 N_1 是区间[0,1)的特征函数。在定义 4.2 中，设 $M_1 = N_1$；在下面，会看到，对于所有 $m\geqslant 2$，还有 $M_m = N_m$。因此，N_m 是 V_0^m 中($V_0^m \subset S_m$)的 m 阶基数样条函数。尽管公式(4.1.11)中 M_m 的定义是显式，但是公式(4.2.1)中 N_m 定义的优点是 N_m 的一些重要性

质能由 N_m 的定义很容易导出。其中，除第(viii)个性质外，其它性质说明如下。

定理 4.3 m 阶基数 B-样条 N_m 满足下述性质：

(i) 对于每个 $f\in C$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)N_m(x)dx=\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1+\cdots+x_m)dx_1\cdots dx_m \tag{4.2.2}$$

(ii) 对于每个 $g\in C^m$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^{(m)}(x)N_m(x)dx=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}g(k) \tag{4.2.3}$$

(iii) $N_m(x)=M_m(x)$， 对所有 x。

(iv) supp $N_m=[0,m]$

(v) $N_m(x)>0$， 对于 $0<x<m$。

(vi) $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}N_m(x-k)=1$， 对于所有 x。

(vii) $N_m'(x)=(\Delta N_{m-1})(x)=N_{m-1}(x)-N_{m-1}(x-1)$。

(viii) 基数 B-样条 N_m 与 N_{m-1} 有恒等关系：

$$N_m(x)=\frac{x}{m-1}N_{m-1}(x)+\frac{m-x}{m-1}N_{m-1}(x-1) \tag{4.2.4}$$

(ix) N_m 关于它的支撑中心是对称的，即：

$$N_m\left(\frac{m}{2}+x\right)=N_m\left(\frac{m}{2}-x\right),\quad x\in\mathbb{R}$$

证明 (i)论断公式(4.2.2)对于 $m=1$ 肯定成立。假定论断对于 $m-1$也成立，那么，根据公式(4.2.1)中 N_m 的定义和这个归纳假

设，有

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} f(x)N_M(x)dx \\
&\quad = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left\{\int_0^1 N_{m-1}(x \quad t)dt\right\}dx \\
&\quad = \int_0^1\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)N_{m-1}(x-t)dx\right\}dt \\
&\quad = \int_0^1\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(y+t)N_{m-1}(y)dy\right\}dt \\
&\quad = \int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1+\cdots+x_{m-1}+t)dx_1\cdots dx_{m-1}dt \\
&\quad = \int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1+\cdots+x_m)dx_1\cdots dx_m
\end{aligned}$$

(ii)论断公式(4.2.3)由公式(4.2.2)得到。因为，直接积分

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 g^{(m)}(x_1+\cdots+x_m)dx_1\cdots dx_m = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}g(k)$$

(iii)固定 $x\in\mathbb{R}$。选择

$$g(t)=\frac{(-1)^m}{(m-1)!}(x-t)_+^{(m-1)}$$

公式(4.2.3)的右边与公式(4.1.12)中 $M_m(x)$相同。因为

$$g^{(m)}(t)=\delta(x-t)$$

其中 δ 是 δ 分布(见公式(2.2.12)与(2.2.14))，公式(4.2.3)的左边变成了 $N_m(x)$。即，$N_m(x)=M_m(x)$对于任何(固定的)$x\in\mathbb{R}$ 成

立。当然，可以避免使用 δ 分布，例如，不用公式(4.2.3)而用基于归纳法的论证，得到(iii)。

论断(iv)，(v)，(vi)和(ix)能容易地用归纳法导出，但要使用公式(4.2.1)中 N_m 的定义。

(vii) 再次使用公式(4.2.1)，有

$$
\begin{aligned}
N'_m(x) &= \int_0^1 N'_{m-1}(x-t)dt \\
&= -N_{m-1}(x-1) + N_{m-1}(x) \\
&= (\Delta N_{m-1})(x)
\end{aligned}
$$

(viii) 为证明(viii)中的恒等式，使用公式(4.1.11)中 M_m 的定义来替代 N_m。当然，已经在(iii)中证明了 $N_m = M_m$。想法是把 x_+^{m-1} 表示为一个单项式与一个截幂的乘积，即

$$
x_+^{m-1} = x \cdot x_+^{m-2}
$$

而且，对于差分使用下述“Leibnitz 法则”：

$$
(\Delta^n fg)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\Delta^k f)(\Delta^{n-k} g)(x-k) \quad (4.2.5)
$$

这个对于差分的恒等式能够容易地用归纳法建立。这个恒等式几乎与导数的 Leibniz 法则完全相同。现在，如果我们在公式(4.2.5)中设 $f(x)=x$ 和 $g(x)=x_+^{m-2}$，并且回忆由公式(4.1.10)中 $\Delta^k f=0$ 对于 $k\geqslant 2$ 成立，我们就有

$$
\begin{aligned}
N_m(x) = M_m(x) &= \frac{1}{(m-1)!}\Delta^m x_+^{m-1} \\
&= \frac{1}{(m-1)!}\{x\Delta^m x_+^{m-2} + m\Delta^{m-1}(x-1)_+^{m-2}\}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{(m-1)!}\{x[\Delta^{m-1}x_+^{m-2} - \Delta^{m-1}(x-1)_+^{m-2}]$$

$$+ m\Delta^{m-1}(x-1)_+^{m-2}\}$$

$$= \frac{x}{m-1}M_{m-1}(x) + \frac{m-x}{m-1}M_{m-1}(x-1)$$

$$= \frac{x}{m-1}N_{m-1}(x) + \frac{m-x}{m-1}N_{m-1}(x-1)$$

这就完成了定理 4.3 的证明。●

下边我们证明:像公式(4.1.14)中引入相同基底的基数 B-样条基

$$\mathscr{B} = \{N_m(x-k) : k \in \mathbb{Z}\} \qquad (4.2.6)$$

它是在公式(3.6.7)意义上的 V_0^m 的 Riesz 基(或无约束基)。用定理 3.24,这等价于研究公式(3.6.8)中上界与下界 A,B 的存在。由公式(4.2.1),看到 $\hat{N}_m=(\hat{N}_1)^m$,所以

$$|\hat{N}_m(\omega)|^2 = \left|\frac{1-e^{-i\omega}}{i\omega}\right|^{2m}$$

(见公式(3.2.16))。因此,用 $2x$ 代替 ω,则有

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{N}_m(2x+2\pi k)|^2$$

$$= 2^{2m}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin^{2m}(x+\pi k)}{(2x+2\pi k)^{2m}}$$

$$= (\sin^{2m}x)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x+\pi k)^{2m}} \qquad (4.2.7)$$

回顾复分析

$$\cot x = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x + \pi k} \tag{4.2.8}$$

这直接产生

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x + \pi k)^{2m}} = -\frac{1}{(2m-1)!} \frac{d^{2m-1}}{dx^{2m-1}} \cot x \tag{4.2.9}$$

所以，把公式(4.2.9)代到公式(4.2.7)，得到

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{N}_m(2x + 2\pi k)|^2 = \frac{-\sin^{2m} x}{(2m-1)!} \frac{d^{2m-1}}{dx^{2m-1}} \cot x \tag{4.2.10}$$

例子 4.4 对于一阶与二阶基数 B-样条 N_1 与 N_2，由公式(4.2.10)得到

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{N}_1(\omega + 2\pi k)|^2 = 1 \tag{4.2.11}$$

和

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{N}_2(\omega - 2\pi k)|^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{4.2.12}$$

因此，$\{N_1(\cdot - k)\}$是正交的(见定理 3.23)，并且

$$\frac{1}{3} \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{N}_2(\omega + 2\pi k)|^2 \leqslant 1 \tag{4.2.13}$$

其中，公式(4.2.13)中的(Riesz)上界与下界是可能达到的最好的。

虽然公式(4.2.10)是显式，并且提供了求最优 Riesz 界的一个工具，但是用计算三角(正弦和余弦)多项式的代数运算对于较大的样条阶数值 m 是不可缺少的。另一种途径是对 $f(x)=N_m(x)$应

用定理 2.28。这需要

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_m(y+k)\overline{N_m(y)}dy = N_{2m}(m+k) \tag{4.2.14}$$

的值的知识。公式(4.2.14)中的恒等式是定义公式(4.2.1)的一个简单推论，而 N_{2m} 在节点序列 $\mathbb{Z}$ 上的值能容易地在定理 4.3 中的公式(4.2.4.)使用递推决定，即：

$$\begin{cases} N_2(k) = \delta_{k,1}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ N_{n+1}(k) = \dfrac{k}{n}N_n(k) + \dfrac{n-k+1}{n}N_n(k-1), \\ \qquad k = 1, \cdots, n \end{cases} \tag{4.2.15}$$

注意，$N_{n+1}(k) = 0$ 对于 $k \leqslant 0$ 或 $k \geqslant n+1$ 成立。因此，使用在定理 2.28 中的公式(2.5.19)，有

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{N}_m(\omega + 2\pi k)|^2 = \sum_{k=-m+1}^{m-1} N_{2m}(m+k)e^{-ik\omega} \tag{4.2.16}$$

现在，应用定理 4.3 中(v)与(vi)得到

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{N}_m(\omega + 2\pi k)|^2 \leqslant 1 \tag{4.2.17}$$

并且 Riesz 界 $B=1$ 在这里是最小可能的。

为确定在公式(4.2.16)中表示式的最大下界，研究所谓的 $2m-1$ 阶(或 $2m-2$ 次)“Euler-Frobenius 多项式”

$$E_{2m-1}(z) := (2m-1)!z^{m-1} \sum_{k=-m+1}^{m-1} N_{2m}(m+k)z^k \tag{4.2.18}$$

在第六章中将证明，E_{2m-1} 的 $2m-2$ 个根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{2m-2}$ 都是单根、实根，而且是负的；当他们以减小的顺序排列时，即

$$0 > \lambda_1 > \cdots > \lambda_{2m-2} \tag{4.2.19}$$

这些单根是成倒数对，即

$$\lambda_1\lambda_{2m-2} = \cdots = \lambda_{m-1}\lambda_m = 1 \tag{4.2.20}$$

因此，我们有

$$A_m := \frac{1}{(2m-1)!}\prod_{k=1}^{m-1}\frac{(1+\lambda_k)^2}{|\lambda_k|} > 0 \tag{4.2.21}$$

现在，由公式(4.2.16)与(4.2.18)，可以写出

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\hat{N}_m(\omega+2\pi k)|^2\\
&= \frac{1}{(2m-1)!}\prod_{k=1}^{2m-2}|e^{i\omega}-\lambda_k|\\
&= \frac{1}{(2m-1)!}\prod_{k=1}^{m-1}\frac{|1-\lambda_k e^{i\omega}|\ |1-\lambda_k e^{-i\omega}|}{|\lambda_k|}\\
&= \frac{1}{(2m-1)!}\prod_{k=1}^{m-1}\frac{1-2\lambda_k\cos\omega+\lambda_k^2}{|\lambda_k|}
\end{aligned}$$

由此，显然有

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\hat{N}_m(\omega+2\pi k)|^2 \geqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty}|\hat{N}_m(\pi+2\pi k)|^2 = A_m$$

这样，可证明下述结果。

定理 4.5 对于任何 $m\geqslant 2$，令 A_m 是公式(4.2.21)中定义的正数。

那么，公式(4.2.6)中的基数 B-样条基 $\mathscr{B}$ 是 V_0^m 的具有 Riesz 界 $A=A_m$ 和 $B=1$ 的一个 Riesz 基。而且，这些界是可能达到的最好的。

4.3 两尺度关系和插入图形显示算法

首先，我们转到 4.1 节并且研究像公式(4.1.17)-(4.1.19)中讨论过的 $L^2(\mathbb{R})$ 的闭子空间的嵌套序列 $\{V_j^m: j\in \mathbb{Z}\}$ 的任何两个相邻的子空间之间的关系。注意事实 $M_m=N_m$，我们可以并且总是用记号 N_m 以代替 M_m。观察下述结果，用一个简单的变量变换，它是定理 4.5 的一个平凡的推论。

推论 4.6 对任何整数对 m 与 j，而 $m\geqslant 2$，族

$$\mathscr{B}_j := \{2^{j/2}N_m(2^jx-k): k\in \mathbb{Z}\}$$

是具有 Riesz 界 $A=A_m$ 和 $B=1$ 的 V_j^m 的一个 Riesz 基。而且，这些界是最优的。

注意，上述定义的基底 $\mathscr{B}_j$ 对于 $j=0$ 简化为 $\mathscr{B}$，并且在计算机算法的结构中，更方便的算法是在 $\mathscr{B}_j$ 中省掉规范化常数 $2^{j/2}$。这只是乘一个因子 2^{-j} 改变 Riesz 界而已。因此，对于每个 j，因为 $N_m(2^jx)\in V_j^m$ 和 $V_j^m\subset V_{j+1}^m$，由推论 4.6，有

$$N_m(2^jx) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{m,k}N_m(2^{j+1}x-k) \qquad (4.3.1)$$

其中 $\{p_{m,k}: k\in \mathbb{Z}\}$ 是 l^2 中的某个序列。现在，用 y 代替 2^jx 并且对公式(4.3.1)两边取 Fourier 变换，可得到公式(4.3.1)的下述等价公式：

$$\hat{N}_m(\omega) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{m,k}e^{-ik\omega/2}\right)\hat{N}_m\left(\frac{\omega}{2}\right) \qquad (4.3.2)$$

这个公式能用来确定公式(4.3.1)中序列 $\{p_{m,k}\}$。事实上，因为

$$\hat{N}_m(\omega) = \left(\frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega}\right)^m$$

(见公式(3.2.16)),则有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{m,k} e^{-ik\omega/2} &= \left(\frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega}\right)^m \left(\frac{i\omega/2}{1 - e^{-i\omega/2}}\right)^m \\ &= \left(\frac{1 + e^{-i\omega/2}}{2}\right)^m \\ &= 2^{-m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} e^{-ik\omega/2}\end{aligned}$$

这就得到了

$$p_{m,k} = \begin{cases} 2^{-m+1}\binom{m}{k} & \text{对于 } 0 \leqslant k \leqslant m \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \tag{4.3.3}$$

所以,公式(4.3.1)的精确公式用

$$N_m(x) = \sum_{k=0}^{m} 2^{-m+1}\binom{m}{k} N_m(2x - k) \tag{4.3.4}$$

给出.这个公式称为 m 阶基数 B-样条的"两尺度关系"。

正如已经在1.6节讨论过的,基数 B-样条(更一般地说,在公式(1.6.2)中,对于任何尺度函数 ϕ)的两尺度关系是一对两尺度关系之一,它产生用公式(1.6.10)和图1.6.2描述的所谓的(小波)重构算法。(另外一个公式描述小波 $\psi(x)$ 与 $\phi(2x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$ 之间的关系,如公式(1.6.3)。)注意到,在小波分解公式(1.6.1)中,如果 f_N 的所有小波分量 $g_{N-M}, \cdots, g_{N-1}$ 恒等于零,那么我们就不必要在公式(1.6.3)中像 $f_N \in V_N$ 那样写任何 $f_{N-M} \in V_{N-M}$。换句话

说，公式(1.6.10)中的重构算法的"一半"能用来把第$(N-M)$层的"分辨水平"(每单位长度有2^{N-M}个图素)的任何函数f_{N-M}表示为一个函数f_N在(较高)N层的分辨水平那样(每单位长度有2^N个图素)。当然，$f_{N-M}=f_N$恒等；但是我们得到了在一个较高分辨水平上的同样的函数的一个"更好的图象"。

现在，集中注意力于基数样条，并且为了计算在节点上B-样条的值，把这个过程与公式(4.2.15)中的算法结合起来，以给出在任何合乎需要的分辨水平的任何基数样条函数的显示图形的一个非常有效的算法。我们首先准确地叙述这个"插入图形显示算法"的目的如下。

考虑m阶具有节点序列$2^{-j_0}\mathbb{Z}$的一个基数样条函数

$$f_{j_0}(x)=\sum_l a_l^{(j_0)}N_m(2^{j_0}x-l) \tag{4.3.5}$$

其中j_0是任意(固定)整数。假定$\{a_l^{(j_0)}\}$是一个(已知的)实数的"因果"序列，其中因果性是指$a_l^{(j_0)}=0$对于所有$l<l_0$成立。目的是对于任何预先指定的整数$j_1\geqslant j_0$，在"实时"中精确地计算序列

$$f_{j_0}\left(\frac{k}{2^{j_1}}\right),\quad k\in\mathbb{Z} \tag{4.3.6}$$

的所有值。意思是，一旦系数"数据"$\{a_l^{(j_0)}\}$在l增长值中已被存储，那么公式(4.3.6)中的序列对于k的增长值就可计算出。注意到，显示$f(x)$的图形，假如(固定的)整数j_1是足够大的，那就足以显示序列$f(k/2^{j_1})$，$k\in\mathbb{Z}$。当然，j_1的大小受可用设备的性能限制。

对于每个$j\geqslant j_0$，使用记号

$$\begin{cases}f_j(x)=\sum_l a_l^{(j)}N_m(2^jx-l)\\ a^j:=\{a_l^j\},\quad l\in\mathbb{Z}\end{cases} \tag{4.3.7}$$

通过使用两尺度关系公式(4.3.1)，我们看到，恒等式$f_{j+1}(x)$

$=f_j(x)$等价于恒等式

$$\begin{aligned}
&\sum_l a_l^{(j+1)} N_m(2^{j+1}x - l) \\
&\quad = \sum_l a_l^{(j)} N_m(2^j x - l) \\
&\quad = \sum_l a_l^{(j)} \sum_k p_{m,k} N_m(2^{j+1}x - 2l - k) \\
&\quad = \sum_l \{ \sum_k p_{m,l-2k} a_k^{(j)} \} N_m(2^{j+1}x - l)
\end{aligned}$$

因此，由于集 $N_m(2^{j+1}x-l), l\in \mathbb{Z}$，是 V_{j+1}^m 的一个 Riesz 基，恒等式 $f_{j+1}(x)=f_j(x)$可用公式

$$a_l^{(j+1)} = \sum_k p_{m,l-2k} a_k^{(j)}, l \in \mathbb{Z} \tag{4.3.8}$$

精确地描述，其中 $a^j=\{a_k^j\}$ 与 $a^{j+1}=\{a_l^{(j+1)}\}$分别是在公式(4.3.7)中 $f_j(x)$与 $f_{j+1}(x)$的系数序列。最后，由序列 $a^{j_1}=\{a_k^{(j_1)}\}$，我们需要计算 $f(k/2^{j_1}), k\in \mathbb{Z}$。这可用序列 a^{j_1} 与序列$\{N_m(k)\}, k\in\mathbb{Z}$，的卷积得到。回忆 $N_m(k)$的值能应用公式(4.2.15)中的算法计算。事实上，对于任何 $k\in\mathbb{Z}$，我们有

$$\begin{aligned}
f_{j_1}(\frac{k}{2^{j_1}}) &= \sum_l a_l^{(j_1)} N_m(2^{j_1}\frac{k}{2^{j_1}} - l) \qquad (4.3.9)\\
&= \sum_l a_l^{(j_1)} N_m(k - l) = \sum_l w_{m,k-l}\, a_l^{(j_1)}
\end{aligned}$$

其中

$$w_{m,k} := N_m(k), \qquad k \in \mathbb{Z} \tag{4.3.10}$$

注意，公式(4.3.8)与(4.3.9)的两边只是“移动平均”(MA)公式，

除了公式(4.3.8)中的序列 a^j 必须"向上抽样"外。是指在 a^j 的任何两个相邻的项之间,都必须插入一个零项。更确切地说,设

$$\begin{cases}\tilde{a}^j = \{\tilde{a}_l^{(j)}\}, & l \in \mathbb{Z} \\ \tilde{a}_{2k}^{(j)} := a_k^{(j)}, & \text{和} \\ \tilde{a}_{2k+1}^{(j)} := 0, & k \in \mathbb{Z}\end{cases} \tag{4.3.11}$$

于是,公式(4.3.8)就变成了一个 MA 公式:

$$a_l^{(j+1)} = \sum_k p_{m,l-k}\tilde{a}_k^{(j)}, \quad l \in \mathbb{Z} \tag{4.3.12}$$

我们总结上述得到的过程如下。

算法 4.7 (插入图形显示算法)

令 f_{j_0} 是具有因果系数序列(如公式(4.3.5))

$$a^{j_0} = \{a_l^{(j_0)} : l = l_0, l_0 + 1, \cdots\}$$

的一个基数样条函数。选择任一 $j_1 \geqslant j_0$,那么对于 $j = j_0, \cdots, j_1 - 1$,计算:

(1°) $\tilde{a}^j$ 使用公式(4.3.11)

(2°) a^{j+1} 使用(1°)和公式(4.3.12)

最后,使用公式(4.3.9)与 $j = j_1 - 1$ 的(2°)计算

(3°) $\{f_{j_0}(\frac{k}{2^{j_1}}) : k \in \mathbb{Z}\}$

(如果 $j_1 = j_0$,跳过(1°)与(2°))。

这个算法能用下述图解描述,其中 ↑ 是指使用公式(4.3.11)向上抽样;↘是指具有权序列 $\{p_{m,k}\}$ 的运动平均;→是指具有权序列 $\{w_{m,k}\}$ 的运动平均。因为权序列 $\{p_{m,k}\}$ 与 $\{w_{m,k}\}$ 是很简单的对称有限序列,它们的项分别是 2^{-m+1} 和 $1/(m-1)!$ 的整数倍,这个算法的实现的确是很简单的。

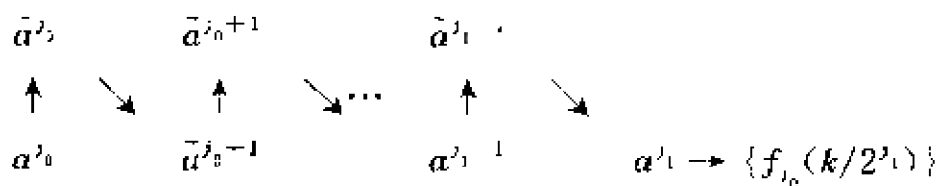


图 4.3.1　插入图形显示

例子 4.8　为了用每单位长度 1 024 个图素的分辨度用图形显示一条三次样条曲线

$$f_0(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l N_4(x-l) \tag{4.3.13}$$

而没有任何误差，我们在算法 4.7 中使用 $m=4$，$j_0=0$，$a_l^{(0)}=a_l$ 和 $j_1=10$（因为 $2^{10}=1\ 024$）。而且权系数 $\{p_{4,k}\}$ 和 $\{w_{4,k}\}$ 能很容易地用公式(4.3.3)与(4.2.15)计算。非零值用

$$\{p_{4,0},\cdots p_{4,4}\} = \left\{\frac{1}{8},\frac{4}{8},\frac{6}{8},\frac{4}{8},\frac{1}{8}\right\} \tag{4.3.14}$$

与

$$\{w_{4,1},w_{4,2},w_{4,3}\} = \left\{\frac{1}{6},\frac{4}{6},\frac{1}{6}\right\} \tag{4.3.15}$$

给出。(注意，序列 $\{p_{4,k}\}$ 的和是 2，不是 1，因为数据 $\{a_l^0\}$ 必须向上抽样。当然，另外的权序列 $\{w_{4,k}\}$ 的和是 1。)在算法 4.7 的第(2^0)步与(3^0)步中使用公式(4.3.12)与(4.3.9)时，公式(4.3.14)与(4.3.15)各自的公分母 8 和 6 可以省掉，以便得到整数运算。当然，最后的输出要在用

$$8^{j_1-j_0}\times 6 = 8^{10}\times 6 = 3\times 2^{31}$$

去除。公式(4.3.14)与(4.3.15)中序列的对称性还将应用于节约处理时间方法上。

4.4 基数样条的 B-网表示与计算

在上节描述的插入图形显示算法还可用来精确地确定任何基数样条函数的所有多项式段。计算多项式，需要附加运算，如矩阵求逆。本节，我们引入一个更直接的方法，以便计算这些解析表示式。通过使用一个多项式的 Bernstein 表示，其系数值（最好称为"B-网"）并不随多项式被限制区间的位置和长度而改变。这在基数样条函数处理中是一个很重要的特征，因为，经常必须平移一个基数 B-样条级数并按比例换算级数以适应不同的分辨等级。

令 n 是任何非负整数。我们首先注意，多项式

$$\phi_k^n(x) := \binom{n}{k}(1-x)^{n-k}x^k, \quad 0 \leqslant k \leqslant n \qquad (4.4.1)$$

的集是多项式空间 π_n 的一个基。这个基常用来定义 n 次 Bernstein 多项式算子：

$$(B_nf)(x) := \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})\,\phi_k^n(x) \qquad (4.4.2)$$

如果 f 是在区间[0,1]上的连续函数，那么很明显，B_nf 在这个区间两端点上插值 f，即

$$\begin{cases}(B_nf)(0) = f(0)\\(B_nf)(1) = f(1)\end{cases} \qquad (4.4.3)$$

然而，B_nf 在该区间的内点 $\frac{1}{n},\cdots,\frac{n-1}{n}$ 上一般不插值 f。代替插值的是，多项式曲线 $y=(B_nf)(x)$ 的图形位于集

$$\left\{(\frac{k}{n},f(\frac{k}{n})) : k = 0,\cdots,n\right\} \qquad (4.4.4)$$

的凸包中。确切地说，这个集"控制"$y=(B_nf)(x)$的图形。我们不打

算对这个问题进行深入的讨论，而只希望指出，$y=(B_nf)(x)$的图形的“形状”受“控制网”公式(4.4.4)控制，它又受$y=f(x)$的图形控制。特别是，有：

(i) 如果在$[0,1]$上$f\geqslant 0$，那么在$[0,1]$上$B_nf\geqslant 0$；

(ii) 如果在$[0,1]$上$f\uparrow$，那么在$[0,1]$上$B_nf\uparrow$；

(iii) 如果f在$[0,1]$上f是向上凹的，那么在$[0,1]$上B_nf是向上凹的。

(i)—(iii)成立的两个主要的原因是：

(1°) B_nf是一个保持所有线性多项式的线性正算子，也就是

$$B_n(f)=f,\quad f\in\pi_1$$

(2°) “符号的笛卡儿法则”适用于在区间$(0,\infty)$上的单项式基$\{1,x,\cdots,x^n\}$。

一般来说，公式(4.4.2)中的 Bernstein 多项式算子能用任何 Bernstein 多项式

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k^n\phi_k^n(x) \tag{4.4.5}$$

代替，而具有系数序列

$$a^n:=\{a_k^n:k=0,\cdots,n\} \tag{4.4.6}$$

这个 Bernstein 多项式没有损失B_nf的任何好的几何性质，只是简单地把f看作是在公式(4.4.6)中数据在点$\{k/n\}$的分片线性(或者二阶基数样条)的插值

$$f_{a^n}(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k^nN_2(nx-k+1) \tag{4.4.7}$$

$y=f_{a^n}(x)$的图形(或为了简化，系数序列$a^n=\{a_k^n\}$本身)称为公式(4.4.5)中 Bernstein 多项式P_n的B-网表示。

下面，对于 Bernstein 多项式的微分和积分，将利用运算：

$$\begin{cases} \partial a_k^n := a_{k+1}^n - a_k^n \\ \sigma a_k^n := \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} a_j^n \end{cases} \tag{4.4.8}$$

在这里以及全书，一个空和总假定为零。

定理 4.9 对于每个 $n \in \mathbb{Z}, n \geqslant 0$，令 P_n 是公式(4.4.5)与(4.4.6)中定义的，具有 B 网 a^n 的 n 次 Bernstein 多项式。那么，P_n 的导数用

$$P'_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (n\partial a_k^n)\ \phi_k^{n-1}(x) \tag{4.4.9}$$

给出；并且，如果 $P'_{n+1}(x) = P_n(x)$，那么，P_n 的积分用

$$\int_0^x P_n(t)dt = \sum_{k=0}^{n+1} (a_0^{n+1} + \sigma a_k^n)\ \phi_k^{n+1}(x) - a_0^{n+1} \tag{4.4.10}$$

给出。

证明 使用记号

$$\phi_{-1}^{n-1} := 0 \quad 与 \quad \phi_n^{n-1} := 0$$

由公式(4.4.1)，对 $k = 0, \cdots, n$，我们有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\phi_k^n(x) &= \binom{n}{k}\{-(n-k)x + k(1-x)\}(1-x)^{n-k-1}x^{k-1} \\ &= n\left\{-\binom{n-1}{k}x + \binom{n-1}{k-1}(1-x)\right\} \\ &\qquad (1-x)^{n-k-1}x^{k-1} \\ &= n\{\phi_{k-1}^{n-1}(x) - \phi_k^{n-1}(x)\} \end{aligned}$$

因此

$$
\begin{aligned}
P'_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} n a_k^n \{\phi_{k-1}^{n-1}(x) - \phi_k^{n-1}(x)\} \\
&= \sum_{k=0}^{n} n(a_{k+1}^n - a_k^n)\ \phi_k^{n-1}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (n\partial a_k^n)\ \phi_k^{n-1}(x)
\end{aligned}
$$

这就证明了公式(4.4.9)。对 P_{n+1} 使用这个公式，并且使假设 $P'_{n+1}=P_n$，我们有

$$
a_0^{n+1} + \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{k-1} a_j^n = a_k^{n+1}
$$

因此，由积分公式

$$
\begin{aligned}
\int_0^x P_n(t)dt &= P_{n+1}(x) - P_{n+1}(0) \qquad (4.4.11) \\
&= P_{n+1}(x) - a_0^{n+1}
\end{aligned}
$$

得到公式(4.4.10)中的论断，这就完成了定理的证明。 ●

现在转到研究 m 阶基数 B-样条 N_m 的 B-网表示。回忆 N_m 由 m 个 $m-1$ 次非平凡多项式段组成，多项式段表示为

$$
P_{m-1,k} := N_m|_{[k-1,k)}, \qquad k = 1,\cdots,m \quad (4.4.12)
$$

另外注意，限制 $N_m(x-1)$ 到同样区间 $[k-1,k)$ 是多项式 $P_{m-1,k-1}(x)$。所以，如果令 $a^{m-1}(k)=\{a_l^{m-1}(k)\}$，$0\leqslant l\leqslant m-1$，表示 $P_{m-1,k}$ 的 B 网，那么限制 $N_m(x)-N_m(x-1)$ 到区间 $[k-1,k)$ 用 Bernstein 多项式

$$P_{m-1,k}(x) - P_{m-1,k-1}(x)$$
$$= \sum_{l=0}^{m-1} \{a_l^{m-1}(k) - a_l^{m-1}(k-1)\} \phi_l^{m-1}(x-k+1)$$
(4.4.13)

给出。所以，应用定理 4.3 中(vii)的恒等式，或等价地

$$P'_{m,k}(x) = P_{m-1,k}(x) - P_{m-1,k-1}(x), \quad x \in [k-1,k) \tag{4.4.14}$$

则有

$$\sum_{l=0}^{m-1} \{a_l^{m-1}(k) - a_l^{m-1}(k-1)\} \phi_l^{m-1}(x-k+1)$$
$$= \frac{d}{dx}\{\sum_{l=0}^{m} a_l^m(k)\, \phi_l^m(x-k+1)\}$$

现在，如果在区间$[0,x]$上积分两边，并且应用公式(4.4.11)与(4.4.10)，我们得到下述 N_m 与 N_{m+1} B-网之间的关系，即：

$$a_l^m(k) = a_0^m(k) + \sigma\{a_l^{m-1}(k) - a_l^{m-1}(k-1)\} \tag{4.4.15}$$
$$= a_0^m(k) + \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{l-1}\{a_j^{m-1}(k) - a_j^{m-1}(k-1)\}$$

$l=0,\cdots,m$。对于 $m \geqslant 2$，因为 N_m 是连续的，所以就有 $a_0^m(k) = P_{m,k}(k-1) = P_{m,k-1}(k-1) = a_m^m(k-1)$。因此，对于任一整数 $m \geqslant 2$，我们导出计算 N_m 的所有多项式段的 B-网的下述方法。

算法 4.10 （基数 B-样条 B-网算法）

令 $m \geqslant 2$ 是任一整数并且设

$$P_{m-1,k}(x) = N_m|_{[k-1,k)}(x) \tag{4.4.16}$$

$$= \sum_{l=0}^{m-1} a_l^{m-1}(k)\, \phi_l^{m-1}(x - k + 1)$$

$$k = 1, \cdots, m$$

再设

$$a_j^{m-1}(0) = 0 \quad 与 \quad a_j^{m-1}(m + 1) = 0,$$
$$j = 0, \cdots, m - 1 \tag{4.4.17}$$

并考虑初始条件

$$a_0^1(1) = 0, \quad a_1^1(1) = 1 = a_0^1(2), \quad a_1^1(2) = 0 \tag{4.4.18}$$

对于 $m=2$，使用公式(4.4.17)与(4.4.18)计算下面(1°)和(2°)。然后对于 $m=3,4,\cdots$，使用(4.4.17)与前面的结果重复同样的过程；其中

(1°) $$b_j^{m-1}(k) := a_j^{m-1}(k) - a_j^{m-1}(k - 1)$$

对于 $j=0,\cdots,m-1$ 和 $k=1,\cdots,m+1$；以及

(2°) $$a_l^m(k) := a_m^m(k - 1) + \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{l-1} b_j^{m-1}(k)$$

对于 $l=0,\cdots m$，和 $k=1,\cdots,m+1$。

算法 4.10 的示意原理图如图 4.4.1 所示，其中公式(4.4.17)使用在计算 $b_j(k)$ 值的每一步。

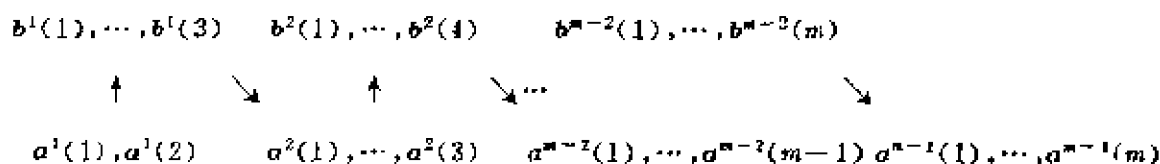


图 4.4.1 $N_m B$-网的计算

例子 4.11 二次($m=3$),三次($m=4$)和四次($m=5$)基数 B-样条的 B-网给出如下。

(i) 对于 $m=3$,

$$a^2(1),\cdots,a^2(3)=\{0,0,\frac{1}{2}\},\{\frac{1}{2},\frac{2}{2},\frac{1}{2}\},\{\frac{1}{2},0,0\}$$

(ii) 对于 $m=4$,

$$a^3(1),\cdots,a^3(4)=\{0,0,0,\frac{1}{6}\},\{\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{4}{6},\frac{4}{6}\},$$
$$\{\frac{4}{6},\frac{4}{6},\frac{2}{6},\frac{1}{6}\},\{\frac{1}{6},0,0,0\}$$

(iii) 对于 $m=5$,

$$a^4(1),\cdots,a^4(5)=\{0,0,0,0,\frac{1}{24}\},\{\frac{1}{24},\frac{2}{24},\frac{4}{24},\frac{8}{24},\frac{11}{24}\},$$
$$\{\frac{11}{24},\frac{14}{24},\frac{16}{24},\frac{14}{24},\frac{11}{24}\},\{(\frac{11}{24},\frac{8}{24},\frac{4}{24},\frac{2}{24}\,\frac{1}{24}\},$$
$$\{\frac{1}{24},0,0,0,0\}$$

一旦 N_m 的 B-网知道了,就很容易确定如公式(4.3.7)所示的任一基数样条函数 f_j 的 B-网。通过一个变量代换,我们可以集中注意力于具有节点序列 $\mathbb{Z}$ 的基数样条函数

$$f_0(x)=\sum_j c_j N_m(x-j) \tag{4.4.19}$$

令 $k\in\mathbb{Z}$ 并且考虑 f_0 在区间$[k-1,k)$上的限制

$$f_0|_{[k-1,k)}(x)=:\sum_{l=0}^{m-1} d_l(k)\,\phi_l^{m-1}(x-k+1) \tag{4.4.20}$$

使用公式(4.4.16)与(4.4.19),还有

$$f_0|_{[k-1,k)}(x) = \sum_j c_j V_m(\cdot - j)|_{[k-1,k)}(x) \tag{4.4.21}$$
$$= \sum_j c_j P_{m-1,k-j}|_{[k-1,k)}(x)$$
$$= \sum_j c_j \sum_l a_l^{m-1}(k-j)\,\phi_l^{m-1}(x-k-1)$$

结果，使公式(4.4.20)与(4.4.21)相等，便得到

$$d_l(k) = \sum_{j=k-m}^{k} a_l^{m-1}(k-j)c_j, \tag{4.4.22}$$
$$l = 0,\cdots,m-1 \text{ 和 } k \in \mathbb{Z}$$

因为，对于 $j>k$ 或 $j<k-m$，$a_l^{m-1}(k-j)=0$。现在，总结前边导出的公式。对于每个固定的 $k\in\mathbb{Z}$ 和 $l=0,\cdots,m-1$，(4.4.22)中带有权序列

$$\{a_l^{m-1}(j): j = 0,\cdots,m\}$$

(所有的项可用算法 4.10 计算，对于 $m=3,4,5$ 在例子 4.11 中给出)的移动平均(MA)公式能用于计算具有系数序列$\{c_j\}$的基数样条级数 f_0。限制在区间$[k-1,k)$上的 B-网

$$\boldsymbol{d}(k) = \{d_0(k),\cdots,d_{m-1}(k)\}$$

4.5 样条逼近公式的构造

开始写下 Fourier 变换的一个有用公式，它很容易对公式(2.1.6)两边取 j 阶导数证明，即

$$(\mathscr{F}[t^j f(t)])(\omega) = i^j D^j \hat{f}(\omega), \quad j = 0,1,\cdots \tag{4.5.1}$$

其中使用了记号

$$D^j g(x) := g^{(j)}(x) \tag{4.5.2}$$

把这个公式应用于 m 阶基数 B-样条 N_m 和它的反射 N_m^- 用某个 $x\in\mathbb{R}$的位移的一种单项式复合就得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}[(x-t)^j N_m(t)]dt = (x-iD)^j \hat{N}_m(\omega) \tag{4.5.3}$$

与

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}[t^j N_m(x-t)]dt \\ &= e^{-ix\omega}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}[(x-t)^j N_m(t)]dt \\ &= e^{-ix\omega}((x-iD)^j \hat{N}_m)(-\omega) \end{aligned} \tag{4.5.4}$$

另一方面，由公式

$$\hat{N}_m(\omega) = \left(\frac{1-e^{-i\omega}}{i\omega}\right)^m$$

很明显，$\hat{N}_m$ 满足性质

$$\begin{cases} \hat{N}_m(0) = 1 \\ (D^j\hat{N}_m)(2\pi k) = 0, \end{cases} \tag{4.5.5}$$
$$j = 0,\cdots,m-1;0 \neq k \in \mathbb{Z}$$

因此，公式(4.5.3)与(4.5.4)在 $\omega=0$ 肯定相同，应用公式(4.5.5)于这两个公式有

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi kt}[(x-t)^j N_m(t)]dt \tag{4.5.6}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi t\hat{}}[t^j N_m(x-t)]dt,$$

$$0 \leqslant j \leqslant m-1, k \in \mathbb{Z}, \text{且 } x \in \mathbb{R}$$

作为公式(4.5.6)的一个推论，下述结果可用公式(2.5.11)中Poisson求和公式的一种变形导出。

定理 4.12 令 $m \geqslant 1$ 是任一整数。那么

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} p(k) N_m(x-k) = \sum_{k=0}^{m-1} N_m(k) p(x-k), \quad p \in \pi_{m-1} \tag{4.5.7}$$

公式(4.5.7)的恒等式说明，如果一个 m 阶基数 B-样条级数的系数序列$\{c_k\}$在某个 $p \in \pi_{m-1}$，$c_k = p(k)$意义上是一个 $m-1$ 次"多项式序列"，那么，基数样条函数就简化为一个 π_{m-1} 中的多项式。注意，公式(4.5.7)右边的下限对于 $m \geqslant 2$ 可改变为 1。

现在暂时离开上述讨论，考虑下述使用"中心"基数 B-样条 $N_m(x+\frac{m}{2})$的"基数样条插值"问题，即：对于任一给定的"容许"数据序列$\{f_j\}$，用

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k N_m(x+\frac{m}{2}-k)\Big|_{x=j} = f_j, \quad j \in \mathbb{Z} \tag{4.5.8}$$

确定解$\{c_k\}$。这里，$\{f_j\}$称为是容许的，如果它具有至多多项式增长。使用"符号"记号：

$$\begin{cases} \widetilde{N}_m(z) := \sum_k N_m(k+\frac{m}{2}) z^k \\ \widetilde{C}(z) := \sum_k c_k z^k \\ \widetilde{F}(z) := \sum_k f_k z^k \end{cases} \tag{4.5.9}$$

至少在形式上，可把公式(4.5.8)写成

$$\widetilde{C}\widetilde{N}_m = \widetilde{F} \tag{4.5.10}$$

注意，$\widetilde{N}_m$ 是一个对称的 Laurent 多项式。还有，作为定理 4.3(vi)的一个推论，余弦多项式

$$D(\omega) := \widetilde{D}(z) := 1 - \widetilde{N}_m(z), \quad z = e^{-i\omega} \tag{4.5.11}$$

对于所有 ω 是非负的。$\widetilde{D}$ 的引入允许我们重新把公式(4.5.10)写成

$$\widetilde{C} = \frac{1}{1 - \widetilde{D}}\widetilde{F} \tag{4.5.12}$$

所以，至少在形式上，有

$$\widetilde{C} = (1 - \widetilde{D} + \widetilde{D}^2 + \cdots)\widetilde{F} \tag{4.5.13}$$

（这里没有证明，因为我们总有 $0 \leqslant D(\omega) < 1$，公式(4.5.13)中的"Neumann 级数"实际上收敛。更祥细的讨论见 4.6 节）在任何情况，公式(4.5.13)的表示形式启发我们考虑用

$$\widetilde{\Lambda}_k(z) := \sum_j \lambda_j^{(k)} z^j := 1 + \widetilde{D} + \cdots + \widetilde{D}^k \tag{4.5.14}$$

定义有限序列 $\Lambda_k = \{\lambda_j^{(k)}\}$。这些序列的每个又定义数据序列$\{f_j\}$的一个卷积算子，即

$$(\Lambda_k * \{f_j\})(l) := \sum_j \lambda_{l-j}^{(k)} f_j \tag{4.5.15}$$

它的符号用 $\widetilde{\Lambda}_k\widetilde{F}$ 给出。

现在，假定数据序列$\{f_j\}$由测量某个连续函数 f 得到，即 $f_j = f(j)$。于是，为了简化公式(4.5.15)的记号，更方便的是写成

$$(\Lambda_k f)(l) := (\Lambda_k * \{f(j)\})(l) = \sum_j \lambda_{l-j}^{(k)} f(j)$$
(4.5.16)

这个序列定义一个线性样条算子

$$(Q_k f)(x) := \sum_{l=-\infty}^{\infty} (\Lambda_k f)(l) N_m(x + \frac{m}{2} - l), \quad f \in C$$
(4.5.17)

它映射 $C=C(\mathbb{R})$到基数样条空间 S_m。我们必须强调指出，因为 $\Lambda_k=\{\lambda_j^k\}$是一个有限序列，所以每个$(\Lambda_k f)(l)$只依赖于 $f(j)$在 $j=l$ 的一个邻域的值，并且这个邻域与 l 无关。换句话 说，Q_k 是定义在 C 上的一个"有界线性局部样条算子"。Q_k 的重要性是，对于任何充分大的 k，它在 π_{m-1} 中保持所有多项式。的确，我们有下述结果。

定理 4.13 令 $m\geq 1$ 是任一整数．那么对于每个 $k>\frac{m-3}{2}$，公式(4.5.17)所定义的线性算子 Q_k 满足

$$(Q_k p)(x) = p(x), \quad p \in \pi_{m-1} \qquad (4.5.18)$$

证明 令 $p\in\pi_{m-1}$。那么，因为$\{\lambda_j^k\}$是一个有限序列，所以 $\Lambda_k p$ 是一个 $m-1$ 次的多项式序列。更确切地说，$(\Lambda_k p)(l)=q(l)$，其中 q 是多项式

$$q(x) = \sum_j \lambda_j^{(k)} p(x-j)$$

而且，对于每个 $j\in\mathbb{Z}$，我们有

$$(Q_k p)(j) = \sum_l (\Lambda_k p)(l) N_m(j - l + \frac{m}{2}) \qquad (4.5.19)$$

并且使用符号记号，由(4.5.14)与(4.5.11)得到

$$(Q_k p)^{\sim} = (\Lambda_k p)^{\sim} \widetilde{N}_m \qquad (4.5.20)$$

$$= (1 + \tilde{D} + \cdots + \tilde{D}^k)\tilde{P}\tilde{N}_m$$
$$= (1 + \tilde{D} + \cdots + \tilde{D}^k)\tilde{N}_m\tilde{P}$$
$$= (1 + \tilde{D} + \cdots + \tilde{D}^k)(1 - \tilde{D})\tilde{P}$$
$$= (1 - \tilde{D}^{k+1})\tilde{P}$$

其中 $\tilde{P}$ 是$\{p(j)\}$的符号。现在，由公式(4.5.11)与(4.5.9)可想到，$\tilde{D}$ 是序列$\{d_j\}$的符号，其中

$$d_j = \delta_{j,0} - N_m(\frac{m}{2} - j), \quad j \in \mathbb{Z} \qquad (4.5.21)$$

所以 $\tilde{D}^{k+1}$ 是$\{d_j\}$的$(k+1)$重卷积的符号。因为，对于所有 $l \in \mathbb{Z}$，$N_m(\frac{m}{2}+l) = N_m(\frac{m}{2}-l)$，有

$$(\{d_j\} * \{p(j)\})(l)$$
$$= \sum_j d_{l-j}p(j) \qquad (4.5.22)$$
$$= (1 - N_m(\frac{m}{2}))p(l) - N_m(\frac{m}{2} - 1)(p(l+1)$$
$$+ p(l-1)) - \cdots - N_m(\frac{m}{2} - [\frac{m}{2}])$$
$$\times (p(l + [\frac{m}{2}]) + p(l - [\frac{m}{2}]))$$
$$= -\sum_{j=1}^{[m/2]} N_m(\frac{m}{2} - j)[p(l+j) - 2p(l) + p(l-j)]$$

其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数，并且使用了性质 $\sum N_m(\frac{m}{2}-j)=1$。公式(4.5.22)的重要性是，$\{d_j\}$与$\{p(j)\}$的卷积可写成 $p(j)$的二阶中心差分的一种(有限)线性组合。因此，$\tilde{D}^{k+1}\tilde{P}$

是$\{P(j)\}$的 $2(k+1)$阶差分的一种(有限)线性组合的符号，所以对于任一 $p\in\pi_{m-1}$，我们有

$$\widetilde{D}^{k+1}\widetilde{P}=0,\quad k>\frac{m-3}{2}\qquad(4.5.23)$$

把公式(4.5.23)代入公式(4.5.20)，我们得到

$$(Q_kp)(l)=p(l),l\in\mathbb{Z},k>\frac{m-3}{2},p\in\pi_{m-1}\qquad(4.5.24)$$

结果，因为公式(4.5.19)中的 Λ_kp 是一个 $m-1$ 次多项式序列，由定理 4.12 得到$(Q_kp)(x)$是 π_{m-1} 中的一个多项式。因此，公式(4.5.18)用公式(4.5.24)可直接得到。 ●

例子 4.14 对于 $m=4$，我们可以选择 $k=1$，于是，线性局部三次样条算子 Q_1 用

$$(Q_1f)(x)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{1}{6}(-f(l+1)+8f(l)-f(l-1))N_4(x+2-l)\qquad(4.5.25)$$

给出。根据定理 4.13，我们有

$$(Q_1p)(x)=p(x),\quad p(x)=1,x,x^2,x^3$$

证明 由(4.5.14)和(4.5.11)，得到 $\widetilde{\Lambda}_1=2-\widetilde{N}_4$，所以

$$\lambda_j^{(1)}=2\delta_{j,0}-N_4(2+j)$$

因为 $N_4(2)=\frac{2}{3}$，$N_4(1)=N_4(3)=\frac{1}{6}$，并且，对于所有其它的整数 l，$N_4(l)=0$，由公式(4.5.16)我们有

$$(A_1 f)(l) = \sum_j \lambda_{l-j}^{(1)} f(j)$$

$$= -\frac{1}{6}f(l+1) + (2-\frac{2}{3})f(l) - \frac{1}{6}f(l-1)$$

这就证明了公式(4.5.25)。 ●

算子 Q_k 称为"拟插值"算子。更一般地说，我们采用下述定义。在整个下述讨论中，我们要考虑空间

$$C_b(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}): \sup_{-\infty<x<\infty} |f(x)| < \infty\} \tag{4.5.26}$$

定义 4.15 映射 $C_b(\mathbb{R})$到基数样条空间 S_m 的一个有界线性算子 Q_k 称为一个拟插值算子，如果一方面，对所有的 $p\in\pi_{m-1}$ 在 $(Qp)(x)=p(x)$ 的意义上，它保持 π_{m-1} 中所有多项式，另一方面，在一个紧集 J 存在的意义上，它是局部的，使对于任一 $f\in C$ 与 $x\in\mathbb{R}$，$(Qf)(x)$ 只依赖于在

$$J + x := \{y - x : y \in J\} \tag{4.5.27}$$

中对于 y 的 $f(y)$。

附注 在前面定义中，当定义 Q 是在 $C_b(\mathbb{R})$上的一个有界线性算子时，无疑考虑的只是函数值数据。为了处理某些导数值组成的数据，我们必须考虑光滑函数的一个相应子类，如某个"Sobolev 空间"上的有界线性算子。

在定理 4.13 中，用公式表示了拟插值算子 Q_k 的一个序列，这个序列的局部支撑 J 在大小方面随 k 的增大而增长。必须指出，在这里不作深入细节的讨论，但$\{Q_k\}$实际上收敛于基数样条插值算子 Q_∞，对于任一 $f\in C$，通过插值性质

$$(Q_\infty f - f)(l) = 0, \quad l \in \mathbb{Z} \tag{4.5.28}$$

唯一地确定（见下节对于基数样条插值的讨论）。研究拟插值算子的理由是，它们为构造基数样条逼近提供了简单和计算上有效的方法，而这种逼近提供最高的逼近阶，即当使用 m 阶基数样条时，可达到 m 阶逼近阶。另外，一个拟插值算子的局部结构使对于实时（或实直线上）应用是可能的。

为了看到一个拟插值算子怎样用来给出最优阶逼近，我们简单地按比例把 B-样条由“零次分辨水平”（即 $x=k, k\in\mathbb{Z}$）换算到“j 次分辨水平”（即 $x=k/2^j, k\in\mathbb{Z}$）。在 $L^2(\mathbb{R})$ 的情况中，这是指，我们在一个高分辨样条空间 V_j^m 处理数据，其中抽样周期和 $h=2^{-j}$ 一样小。通常，我们可以考虑任何小的比例参数 $h>0$，并且借助于 h 的 m 次方量度逼近阶，即 $O(h^m)$。这个意思是，当数据样本表示一个充分光滑的函数时，误差阶用 $h\to 0^+$ 时的 h^m 的一个常数倍约束。我们使用记号

$$(s_h f)(x) := f(\frac{1}{h}x) \tag{4.5.29}$$

来描述比例换算过程。于是，定义 4.15 中描述的任一拟插值算子 Q，使用比例换算的构成和拟插值，就得出一个“逼近公式”，即

$$Q^h := s_h \circ Q \circ s_{h^{-1}} \tag{4.5.30}$$

定理 4.16 假定 Q 是一个由 $C_b(\mathbb{R})$ 到 S_m 的拟插值算子，K 是在 $\mathbb{R}$ 中任一紧集，而 Ω 是包含 K 的任一开集。那么，对于每个 $f\in C_b(\mathbb{R})\cap C^m(\Omega)$，存在只依赖 f 和 K 的某个正常数 C，使

$$\max_{x\in K}|(Q^h f - f)(x)| \leqslant Ch^m \tag{4.5.31}$$

对于所有充分小的 $h>0$ 成立。

证明 由 Q 的定义，容易看出 $Q^h p=p$ 对于所有 $p\in\pi_{m-1}$ 成立并且 $\|Q^h\|=\|Q\|, h>0$。令

$$\rho := m + \max_{x \in J} |x|$$

并且假定

$$\max_{x \in K} |(Q^h f - f)(x)| = |(Q^h f - f)(x_0)|, \quad x_0 \in K$$

因此

$$\max_{x \in K} |(Q^h f - f)(x)| = \max_{|x-x_0| \leqslant h_\rho} |(Q^h f - f)(x)|$$

于是，根据 Q 和 N_m 的局部性质，有

$$\begin{aligned} &\max_{x \in K} |(Q^h f - f)(x)| \\ &\quad = \max_{|x-x_0| \leqslant h_\rho} |(Q^h(f - p) + (p - f))(x)| \\ &\quad \leqslant \max_{|x-x_0| \leqslant h_\rho} |f(x) - p(x)| (1 + \|Q\|) \end{aligned}$$

其中 p 是在 π_{m-1} 中的任一多项式。注意，$f \in C^m(\Omega)$ 和 Ω 是包含 $x_0 \in K$ 的一个开集，并且选择 f 在 x_0 的 $(m-1)$ 次 Taylor 多项式是在上述估计中的多项式 p，我们得到公式(4.5.31)而有

$$C = \frac{\rho^m}{m!} \sup_{x \in \Omega^0} |f^{(m)}(x)|$$

其中 Ω^0 是包含 K 的任一开集，使 Ω^0 的闭包位于 Ω 中。 ●

为了给出一个更一般的构造拟插值公式的方法，我们回到定理 4.13，其中公式(4.5.17)定义的 Q_k 是用有限序列 $\Lambda_k = \{\lambda_j^k\}$ 与数据序列 $\{f_j\}$ 的卷积确定。令 k 是固定的并且考虑用

$$\lambda^* f := (\Lambda_k f)(0) = \sum_j \lambda_j^{(k)} f(-j)$$

定义的有界线性算子 λ^*。对于任何固定的 $l \in \mathbb{Z}$，如果 $f(\cdot + l)$ 作

为以点表示的变量的函数，显然

$$\lambda^* f(\cdot + l) = (\Lambda_k f)(l) = \sum_j \lambda_j^{(k)} f(l - j)$$

也就是说，拟插值公式(4.5.17)在 C 上可用一个线性泛函 λ^* 确定，即

$$(Q_k f)(x) = \sum_l \lambda^* f(\cdot + l) N_m(x + \frac{m}{2} - l) \tag{4.5.32}$$

为了推广这个公式，考虑是否能够使用在 C 上的一族有界线性泛函 $\lambda^l, l \in \mathbb{Z}$，代替 λ^*。例如，我们试着在公式(4.5.32)中用 $\lambda^l f(\cdot + l)$ 代替 $\lambda^* f(\cdot + l)$。即，我们感兴趣的是，研究族 $\{\lambda^l\}$ 使由

$$(Q^0 f)(x) = \sum_l \lambda^l f(\cdot + l) N_m(x + \frac{m}{2} - l) \tag{4.5.33}$$

定义的线性样条算子 Q^0 是一个拟插值算子的条件。因为 Q^0 是一个有界算子，假定这些线性泛函的范数 $\|\lambda^l\|$ 满足

$$\sup_j \sum_{l=j}^{m+j} \|\lambda^l\| < \infty \tag{4.5.34}$$

就足够了。例如，如果 $\{\lambda^l\}$ 是一有限族，那么公式(4.5.34)肯定满足。另一方面，更困难的是，对于一个一般的 Q^0 证明其局部性质。因为在许多应用中唯有平移不变有界线性泛函是有意义的，我们考虑形式为

$$\lambda^l f(\cdot + l) = \sum_j c_l^{(l)} f(l - j) \tag{4.5.35}$$

的那些 λ^l，其中 $\{c_j^{(l)}\}, l \in \mathbb{Z}$，是有限序列。因此，如果这些序列的支撑的并是一个有限集，那么 Q^0 也具有局部性质。此外，这个性质肯

定是用任一有限族$\{\lambda^l\}$控制。最后，多项式怎样用Q^0实现再生成？为得到这个性质，关于λ^l的一个很简单的假定是要求每个λ^l满足

$$\lambda^l p = \lambda^* p, \quad p \in \pi_{m-1} \tag{4.5.36}$$

注意，公式(4.5.35)可以用一个包括导数数据信息的更一般公式代替，如果我们乐于考虑在相应的可微函数子空间上的有界线性算子Q^0。

我们用一个例子结束本节，以便证明用允许多于一个λ^l实现自由度的有效性。

例子 4.17 注意，公式(4.5.17)中拟插值算子Q_k的任何一个都需要对于所有$l \in \mathbb{Z}$，$f(l)$的数据信息。我们已经在例子 4.14 中用公式表示了三次样条算子Q_1，其中

$$\lambda^* f = -\frac{1}{6}f(1) + \frac{8}{6}f(0) - \frac{1}{6}f(-1)$$

我们推导一个只需要数据信息$f(2l)$，$l \in \mathbb{Z}$，的三次样条拟插值算子Q^0。

解 考虑两个有界线性泛函λ_e与λ_o，它定义为

$$\begin{cases} \lambda_e f := \sum_j c_j^{(1)} f(2j) \\ \lambda_o f := \sum_j c_j^{(2)} f(2j+1) \end{cases} \tag{4.5.37}$$

然后，设

$$\lambda^{2l} := \lambda_e \quad 与 \quad \lambda^{2l-1} := \lambda_o, \quad l \in \mathbb{Z}$$

则有

$$
\begin{cases}
\lambda^{2l} f(\cdot + 2l) = \sum_j c_j^{(1)} f(2j + 2l) \\
\lambda^{2l-1} f(\cdot + 2l - 1) = \sum_j c_j^{(2)} f(2j + 2l)
\end{cases}
\tag{4.5.38}
$$

因此，在拟插值公式

$$
\begin{aligned}
(Q^0 f)(x) &= \sum_k \lambda^k f(\cdot + k) N_4(x + 2 - k) \\
&= \sum_l \Big[\sum_j c_j^{(1)} f(2j + 2l)\Big] N_4(x - 2l + 2) \\
&= \sum_l \Big[\sum_j c_j^{(2)} f(2j + 2l)\Big] N_4(x - 2l + 3)
\end{aligned}
\tag{4.5.39}
$$

中只需要在 f 上的数据是 $f(2l)$，$l \in \mathbb{Z}$。为确定 $\{c_j^{(1)}\}$ 与 $\{c_j^{(2)}\}$，应用公式（4.5.36）。首先，必须计算 $\lambda^* p_n$，其中 $p_n(x) = x^n$，$n = 0, \cdots, 3$。这些值是

$$
(\lambda^* p_0, \cdots, \lambda^* p_3) = \left(1, 0, -\frac{1}{3}, 0\right)
$$

因此，为满足公式（4.5.36），必须解两个线性方程组：

$$
\begin{cases}
\sum_j c_j^{(1)} = 1 & \sum_j 2j c_j^{(1)} = 0 \\
\sum_j (2j)^2 c_j^{(1)} = -\frac{1}{3} & \sum_j (2j)^3 c_j^{(1)} = 0
\end{cases}
\tag{4.5.40}
$$

和

$$
\begin{cases}
\sum_j c_j^{(2)} = 1 & \sum_j (2j + 1) c_j^{(2)} = 0 \\
\sum_j (2j + 1)^2 c_j^{(2)} = -\frac{1}{3} & \sum_j (2j + 1)^3 c_j^{(2)} = 0
\end{cases}
\tag{4.5.41}
$$

当然，这个方程组没有唯一解，但是具有最小支撑的公式(4.5.40)与(4.5.41)的解用

$$c_0^{(1)}=\frac{26}{24};\quad c_{-1}^{(1)}=c_1^{(1)}=-\frac{1}{24};\quad c_l^{(1)}=0,$$

$$\text{对于 } l\neq -1,0,1 \tag{4.5.42}$$

和

$$c_0^{(2)}=c_{-1}^{(2)}=\frac{7}{12};$$

$$c_1^{(2)}=c_{-2}^{(2)}=-\frac{1}{12};$$

$$c_l^{(2)}=0,\quad \text{对于 } l\neq -2,-1,0,1 \tag{4.5.43}$$

给出。这些解就是公式(4.5.39)中的系数。 ●

4.6 样条插值公式的构造

构造在前节中引入的逼近公式的一般方法通常不产生插值离散数据的样条函数。为了构造一个样条插值算子，很重要的是要求算子至少再产生直到某个适当次数的多项式。这个要求不仅有助于达到一个尚好的逼近阶，而且对保持已知数据的某种形状也是关键的。毕竟，插值一个常数数据的集，人们期望使用一条(水平)直线。

首先给出公式(4.5.8)中引入的基数样条插值问题的一种简洁的讨论；并且指出，虽然在这种情况下达到最高阶逼近，但是相应的样条插值算子不是局部的。这就限制了它应用地许多工程问题，如实时(或实直线上)数据插值。本节的主要目的是引入产生拟插值算子一种构造方法，而这个拟插值算子具有附加的插值性质。

我们讨论的中心是构造插值数据$\{\delta_{j,0}\}$的所谓"基本样条"。如

果有一个基本样条在手头，一个插值算子可以容易地通过使用任一给出的数据序列作为由基本样条的整数平移形成的样条级数的系数序列得到。

首先研究具有数据序列$\{\delta_{j,0}\}$的公式(4.5.8)所叙述的基数样条插值问题。对于$\{c_k^{(m)}\}$解双无限方程组

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(m)} N_m\left(\frac{m}{2}+j-k\right)=\delta_{j,0}, \quad j \in \mathbb{Z} \tag{4.6.1}$$

我们有一个 m 阶“基本基数样条函数”

$$L_m(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(m)} N_m\left(x+\frac{m}{2}-k\right) \tag{4.6.2}$$

正像公式(4.6.1)给出的，它具有插值性质

$$L_m(j)=\delta_{j,0} \tag{4.6.3}$$

与基数 B 样条 N_m 具有紧支撑形成对照。将看到，对于每个 $m \geqslant 3$，系数序列$\{c_k^{(m)}\}$不是有限的，所以基本基数样条 L_m 在任何紧集的外边不恒为零。因此，当它应用于插值一个给定的数据序列$\{f_j\}$时，其中对于某个 $f \in C$，$f_j=f(j)$，必须注意无限样条级数

$$(J_m f)(x):=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) L_m(x-k) \tag{4.6.4}$$

的收敛性。幸好，正如我们马上看到的那样，当 $k \rightarrow \pm\infty$时，$\{c_k^{m}\}$以指数快速地衰减到零。这推出，基本基数样条函数 $L_m(x)$ 随 $x \rightarrow \pm\infty$ 也以同样速度衰减到零。这样，如果$\{f(k)\}$至多是多项式增长的，那么公式(4.6.4)的样条级数肯定在每个 $x \in \mathbb{R}$ 收敛；并且由于插值性质公式(4.6.3)，我们有

$$(J_m f-f)(j)=0, \quad j \in \mathbb{Z} \tag{4.6.5}$$

即，插值样条算子 J_m 给出了在每个 $x=j, j\in\mathbb{Z}$，插值已知的数据函数 f 的一个样条函数 $J_m f$。

为了研究基本基数样条函数 $L_m(x)$，必须转到系数用 B-样条值 $N_m(\frac{m}{2}+k)$ 给出的线性方程组(4.6.1)。像在公式(4.5.9)中，我们考虑符号

$$\widetilde{N}_m(z)=\sum_k N_m(\frac{m}{2}+k)z^k$$

并且注意，这个对称的 Laurent 多项式能够容易地通过研究

$$E_{m-1}(z):=(m-1)!z^{[(m-1)/2]}\widetilde{N}_m(z) \qquad (4.6.6)$$

转换为具有整数系数的一个代数多项式。其中，如前所述，$[x]$表示不超过 x 的最大整数。这个记号推广了从偶阶基数 B-样条到任意阶 Euler-Frobenius 多项式的定义。(见公式(4.2.18)，更详细的和一般性见下两章。)对于我们目前的应用来说，公式(4.6.6)中 Euler-Frobenius 多项式 E_{m-1} 的最重要性质是，在单位圆 $|z|=1$ 上它不为零(更一般的结果见下章中的定理 5.10)。由此得到对于所有 $z=e^{-i\omega}, \omega\in\mathbb{R}, \widetilde{N}_m(z)\neq 0$ 成立。现在，像在公式(4.5.10)中一样，线性方程组(4.6.1)能够写为

$$\widetilde{C}_m(z)=\frac{1}{\widetilde{N}_m(z)} \qquad (4.6.7)$$

其中 $\widetilde{C}_m(z)$ 是 $\{c_k^{(m)}\}$ 是符号。使用部分分式，容易看到，当 $k\to\pm\infty$ 时，序列 $\{c_k^{(m)}\}$ 具有指数衰减，并且衰减速率在 $|z|<1$ 中由最接近单位圆 $|z|=1$ 的 E_{m-1} 的根的大小给出。

应用 Poisson 求和公式(2.5.8)，还可以写出

$$\widetilde{N}_m(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\widehat{N}_m(\cdot+\frac{m}{2}))(\omega+2\pi k), \quad z=e^{-i\omega} \qquad (4.6.8)$$

其中 $\hat{N}_m(\cdot+\frac{m}{2})$ 表示 $N_m(x+\frac{m}{2})$ 的 Fourier 变换，并且公式(4.6.8)中的这个 Fourier 变换在 $\omega+2\pi k$ 时被计算。因此，取公式(4.6.2)两边的 Fourier 变换，并且应用公式(4.6.7)与(4.6.8)，我们有基本基数样条函数(的 Fourier 变换)的两个公式，即

$$\hat{L}_m(\omega)=\frac{(\hat{N}_m(\cdot+\frac{m}{2}))(\omega)}{\tilde{N}_m(e^{-i\omega})}$$

$$=\frac{(\hat{N}_m(\cdot+\frac{m}{2}))(\omega)}{\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\hat{N}_m(\cdot+\frac{m}{2}))(\omega+2\pi k)} \tag{4.6.9}$$

这两个公式的每一个都能够使用于计算 $L_m(x)$。

例子 4.18 确定三次基本基数样条 $L_4(x)$。

解 使用公式(4.2.15)中描述的递推算法，可求得 $N_4(k), k\in\mathbb{Z}$ 的非零值：

$$\{N_4(1),N_4(2),N_4(3)\}=\{\frac{1}{6},\frac{4}{6},\frac{1}{6}\}$$

正如已经在公式(4.3.15)中看到的那样。因此，相应的 Euler-Frobenius 多项式用

$$E_3(z)=1+4z+z^2$$

$$=(z+2-\sqrt{3})(z+2+\sqrt{3})$$

给出。结果，有

$$C_4(z)=\frac{(4-1)!z^{[(4-1)/2]}}{E_3(z)} \tag{4.6.10}$$

$$= \frac{6z}{(z+2-\sqrt{3})(z+2-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{6}{(-2+\sqrt{3})-(-2-\sqrt{3})}$$

$$\times \left(\frac{-2+\sqrt{3}}{z+2-\sqrt{3}} - \frac{-2-\sqrt{3}}{z+2+\sqrt{3}}\right)$$

$$= \sqrt{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-2+\sqrt{3})^{n+1}z^{-n-1}\right.$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty}(-2-\sqrt{3})^{-n}z^{n}\right)$$

$$= \sqrt{3}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-2+\sqrt{3})^{|n|}z^{n}$$

所以序列$\{c_k^{(4)}\}$用

$$c_k^{(4)} = (-1)^k\sqrt{3}(2-\sqrt{3})^{|k|}, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{4.6.11}$$

给出。这就得到了三次基本基数样条

$$L_4(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\sqrt{3}(2-\sqrt{3})^{|k|}N_4(x+2-k) \tag{4.6.12}$$

注意，由于$\mathrm{supp}N_4(\cdot+2-k)=[k-2,k+2]$，$L_4(x)$衰减的速率是

$$O((2-\sqrt{3})^{|x|}), 当 x \to \pm\infty 时 \tag{4.6.13}$$



至于计算公式(4.6.4)中的样条插值$J_m f$，与其直接做，还不

如对于大的 k 值,用 Q_kf 逼近 J_mf 更有效,其中 Q_k 是在公式(4.5.17)中引入的拟插值算子。为了分析产生的误差,我们首先返回到公式(4.5.11)与(4.5.21),并研究

$$
\begin{aligned}
&\left|(\underbrace{\{d_j\} * \cdots * \{d_j\}}_{k})(l)\right| \\
&\quad = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \widetilde{D}(e^{-i\omega})^k e^{il\omega} d\omega\right| \\
&\quad = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{\pi} (1 - \widetilde{N}_m(e^{-i\omega}))^k e^{il\omega} d\omega\right| \\
&\quad \leqslant r_m^k
\end{aligned}
\tag{4.6.14}
$$

其中

$$
r_m = 1 - \min_{\omega} \widetilde{N}_m(e^{-i\omega}) \tag{4.6.15}
$$

因此,通过重复公式(4.5.20)缩短论证,对于每个 $l \in \mathbb{Z}$ 且 $p \in \pi_{m-1}$,有

$$
\begin{aligned}
&|(Q_kf - J_mf)(l)| \\
&\quad = |(Q_kf - f)(l)| \\
&\quad = |(Q_k(f - p))(l) - (f - p)(l)| \\
&\quad = |(\underbrace{\{d_j\} * \cdots * \{d_j\}}_{k+1} * \{f(j) - p(j)\})(l)| \\
&\quad \leqslant r_m^{k+1} \max_{j \in \mathbb{Z}} |f(j) - p(j)|
\end{aligned}
$$

这就给出

$$
|(Q_kf - J_mf)(l)| \leqslant r_m^{k+1} \mathrm{dist}_{l^\infty}(f, \pi_{m-1}), \quad l \in \mathbb{Z} \tag{4.6.16}
$$

其中

$$\operatorname{dist}_{l^\infty}(f,\pi_{m-1}) := \min_{p\in\pi_{m-1}} \max_{k\in\mathbb{Z}} |f(k) - p(k)|$$

例子 4.19 估计$(Q_kf)(l)$与三次样条插值(即 $m=4$)$(J_4f)(l)$，$l\in\mathbb{Z}$，之间的误差。

解 容易看到

$$\widetilde{N}_4(e^{-i\omega}) = \frac{e^{i\omega}+4+e^{-i\omega}}{6} = \frac{2+\cos\omega}{3}$$

这就得到

$$r_4 = 1 \qquad \min_\omega\left(\frac{2+\cos\omega}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

因此，根据公式(4.6.16)，有

$$|(Q_kf - J_4f)(l)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}\operatorname{dist}_{l^\infty}(f,\pi_3), l \in \mathbb{Z}$$

(4.6.17)

例如，如果$\{f(k)\}$是一个有界序列，且注意到

$$\operatorname{dist}_{l^\infty}(f,\pi_3) \leqslant \operatorname{dist}_{l^\infty}(f,\pi_0)$$

于是由公式(4.6.17)得到

$$\sup_{l\in\mathbb{Z}}|(Q_kf - J_4f)(l)| \leqslant (\sup_{l\in\mathbb{Z}} f(l) + \inf_{l\in\mathbb{Z}} f(l))\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}$$



用拟插值 Q_kf 代替 J_mf 时，虽然公式(4.6.16)给出一个良好的估计，但通常不具有精确的插值。然而，选择 Q_kf 而不是选择 J_mf 的原因是拟插值算子的局部性质使它能使用于实时的应用。如果我们一定要求精确插值，那么为得到一个局部插值公式的一种方

法是使用在一个比较细的网格上的一个样条空间，如对于某个 $j>0$ 的 S_m^j 代替 S_m（其中 S_m^j 是具有节点序列 $2^{-j}\mathbb{Z}$ 的 m 阶基数样条空间，像在 4.1 节中所讨论的）。例如，为了插值一个已知数据序列 $\{f(j): j\in\mathbb{Z}\}$，很明显，如果

$$\delta_m := \text{下界为} \log_2 m - 1 \text{的最小整数} \tag{4.6.18}$$

那么，基数样条函数

$$\xi_m(x) := \frac{1}{N_m(m/2)} N_m(2^{\delta_m} x + \frac{m}{2}) \tag{4.6.19}$$

满足要求

$$\xi_m(j) = \delta_{j,0}, \quad j \in \mathbb{Z} \tag{4.6.20}$$

因此，样条算子

$$(R_m f)(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\xi_m(x-k) \tag{4.6.21}$$

既是局部的，又是插值的。不幸的是，$R_m f$ 是 f 的一个很差的表示，因为就是常数数据函数也不复原。例如，当使用三次样条时，我们有 $\delta_4=1$ 和

$$\xi_4(x) = \frac{3}{2}N_4(2x+2) \tag{4.6.22}$$

因此，对于数据函数 $f(x)=1, x\in\mathbb{R}$，我们有

$$(R_4 f)(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}N_4(3) + \frac{3}{2}N_4(1) = \frac{1}{2}$$

而不是 1。

现在我们有两个局部方法：如上节研究过的构造拟插算子 Q 的方法和局部插值公式(4.6.21)方法。第一种方法复原在相应的

样条空间中的所有多项式，因此提供最优逼近阶（见定理 4.16）；而第二种方法提供了一种插值样条。为构造一种有界线性局部算子 P，既保持 Q 的多项式再生性质，又保持 R_m 的插值性质，我们考虑下述"混合"算子：

$$P := R_m + Q - R_m Q \qquad (4.6.23)$$

因为 Q 与 R_m 都是在 C 上的有界线性局部算子，所以 P 是在 C 上的有界线性局部算子。现在，对于任何 $x \in \mathbb{R}$ 及 $p \in \pi_{m-1}$，由事实 $(Qp)(x) = p(x)$，我们有

$$\begin{aligned}(Pp)(x) &= (R_m p)(x) + (Qp)(x) - (R_m Qp)(x) \\ &= (R_m p)(x) + p(x) - (R_m p)(x) \\ &= p(x)\end{aligned}$$

这样 P 还将保持 π_{m-1} 中的所有元素。另一方面，对于任何 $f \in C$ 与 $j \in \mathbb{Z}$，由于 $(R_m f)(j) = f(j)$，我们还有

$$\begin{aligned}(Pf)(j) &= (R_m f)(j) + (Qf)(j) - (R_m(Qf))(j) \\ &= f(j) + (Qf)(j) - (Qf)(j) = f(j)\end{aligned}$$

因此，确实已经证明了，P 是在 $\mathbb{Z}$ 上插值的拟插值算子。两个重点仍然必须注意：首先，因为我们对数据 $f(j)$，$j \in \mathbb{Z}$，的插值感兴趣，所以局部算子 P 就只依赖于这个数据集，而不依赖于其它的数据。这对于公式（4.6.21）中的 R_m 当然是正确的，但是拟插值算子 Q 也必须具有这个性质。幸好，正像在上节引入的，通过施加条件公式（4.5.36）来确定线性泛函公式（4.5.33）中 Q^0 的通用公式能用于改变数据集。其次，因为 R_m 的值域是样条空间 S_m^d，我们还应该把 $Q - Q^0$ 的值域限制到 S_m^d。因此，我们建立了下述结果。

定理 4.20 令 Q^0 是用数据序列 $f(j)$，$j \in \mathbb{Z}$，$f \in C_b(\mathbb{R})$ 的由 $C_b(\mathbb{R})$ 到 S_m^d 内的一个拟插值算子。如果 R_m 是用公式（4.6.21）给出的，

那么公式(4.6.23)中定义的算子 P 也是一个用数据序列 $f(j)$，$j\in\mathbb{Z}$，值域 S_m^a 在 $C_b(\mathbb{R})$ 上的一个拟插值算子，并且满足附加性质

$$(Pf-f)(l)=0,\quad l\in\mathbb{Z}$$

当然，插值的拟插值算子 P 能够通过选择 $h=2^{-j}a$（对于任一固定的正常数 a 与大的正整数 j）"换算"得到算子

$$P^h:=s_h\circ P\circ s_{h^{-1}},\quad h>0 \tag{4.6.24}$$

以便处理另外的数据序列

$$f(2^{-j}al),\quad l\in\mathbb{Z} \tag{4.6.25}$$

并达到最优的逼近阶 $O(h^m)$（见定理 4.16）。通过提供三次样条插值和拟插值算子的一个例子结束本章。

例子 4.21 构造一个局部三次样条插值算子 P_4^0 使只依赖于数据集 $f(j)$，$j\in\mathbb{Z}$，并保持所有三次多项式。

解 在例子 4.17 中用 1/2 换算公式(4.5.39)中的拟插值算子 Q^0，我们得到拟插值公式

$$\begin{aligned}(Q_4^0f)(x)&=\sum_l\Big\{\sum_j c_j^{(1)}f(j+l)\Big\}N_4(2x-2l+2)\\&\quad+\sum_l\Big\{\sum_j c_j^{(2)}f(j+l)\Big\}N_4(2x-2l+3)\end{aligned} \tag{4.6.26}$$

使复原 π_3 中的所有元素，其中 $\{c_j^{(1)}\}$ 与 $\{c_j^{(2)}\}$ 用公式(4.5.42)和(4.5.43)给出。因此，应用 $Q=Q_4^0$ 的公式(4.6.23)和用公式(4.6.21)与(4.6.22)给出的 $R_m=R_4$，有

$$(P_4^0f)(x)=\sum_k\frac{3}{2}f(k)N_4(2x+2-2k)+(Q_4^0f)(x)$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_k \frac{3}{2}\{\sum_{j,l} c_j^{(1)} f(j+l) N_4(2k-2l+2) \\
&+\sum_{j,l} c_j^{(2)} f(j+l) N_4(2k-2l+3)\} \\
&\times N_4(2x+2-2k) \qquad (4.6.27) \\
=&\sum_l \{\sum_j c_j^{(2)} f(j+l)\} N_4(2x+2-(2l-1)) \\
&\quad+\sum_k \{\frac{3}{2} f(k)-\sum_j \frac{1}{4} c_j^{(2)} (f(j+k) \\
&+f(j+k+1))\} N_4(2x+2-2k) \\
=&\sum_l \{\sum_n v_{l-2n}^{(4)} f(n)\} N_4(2x+2-l)
\end{aligned}
$$

其中

$$
v_n^{(4)} := \begin{cases} \frac{29}{24} & \text{对 } n=0 \\ \frac{7}{12} & \text{对 } n=\pm 1 \\ -\frac{1}{8} & \text{对 } n=\pm 2 \\ -\frac{1}{12} & \text{对 } n=\pm 3 \\ \frac{1}{48} & \text{对 } n=\pm 4 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \qquad (4.6.28)
$$

注意，为确定基数 B-样条级数

$$
(P_4^0 f)(x) = \sum_l \gamma_l(f) N_4(2x+2-l) \qquad (4.6.29)
$$

我们可简单地应用 MA 公式

$$\gamma_l(f) = \sum_{n=l-4}^{l+4} v_{l-n}^{(4)} \tilde{f}(n) \qquad (4.6.30)$$

其中$\{\tilde{f}(n)\}$由数据序列$\{f(n)\}$通过向上抽样得到，即：$\tilde{f}(2n)=f(n)$且$\tilde{f}(2n+1)=0$，$n\in\mathbb{Z}$（见(4.3.11)）。●

第五章　尺度函数与小波

任何 $\mathscr{R}$ 小波（或简称为小波）把 Hilbert 空间 $L^2(\mathbb{R})$ 都能分解成闭子空间 $W_j, j\in\mathbb{Z}$，的某种直接和；在这个意义上讲，每个子空间 W_j 是函数集合

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^jx - k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

的线性张成在 $L^2(\mathbb{R})$ 中的闭包。因此，相应的子空间

$$V_j := \cdots \dotplus W_{j-2} \dotplus W_{j-1} \qquad j \in \mathbb{Z}$$

形成 $L^2(\mathbb{R})$ 的子空间的一个嵌套序列，它们的并在空间 $L^2(\mathbb{R})$ 中是稠密的，它们的交是零空间 $\{0\}$。

这个观察对于构造小波 ψ 及其相应的对偶 $\tilde{\psi}$ 可诱导出下述一种很有用技术的引入，即：生成空间 $V_j, j\in\mathbb{Z}$，的某个“尺度函数”存在性的调查和结构的研究，这个函数的生成 V_j 和 ψ 生成空间 $W_j, j\in\mathbb{Z}$，的方式一样。特别是，函数

$$\phi(x - k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

的集形成 V_0 的一个 Riesz（或无约束）基；因此，ϕ 生成 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个多分辨分析（MRA）$\{V_j\}$。因为 $\phi\in V_0\subset V_1$，所以存在一个唯一序列 $\{p_k\}\in\ell^2$ 建立 $\phi(x)$ 与函数 $\phi(2x-k), k\in\mathbb{Z}$，的关系式；并且 ϕ 的结构由这个“两尺度序列”$\{p_k\}$ 控制。例如，一个有限两尺度序列表征具有紧支撑的一个尺度函数。在这方面，如果这个有限序列的长是

最短的，ϕ就具有最小支撑。

将会看到，在选取相应的小波 ψ 及其对偶 $\tilde{\psi}$ 时，有相当多的自由，而本章的另一目的是要研究（在 $V_{j+1}=V_j\dot{+}W_j$，$j\in\mathbb{Z}$，意义上）补空间 W_j 的结构，以及描述这种自由的建立 W_j 与 V_{j+1} 关系式的相应的"两尺度序列"。如果完全地懂得了自由度，就有可能构造小波 ψ 及其对偶 $\tilde{\psi}$，以便满足一定的技术要求。在这些特别有意义的技术要求中，特别是对工程师，它们是：空间 $L^2(\mathbb{R})$分解为子空间 W_j 的一种正交和；$L^2(\mathbb{R})$的一个规范正交基用 ψ 生成；有限的重构与分解序列作为紧支撑的 ψ 与 $\tilde{\psi}$ 的一个结果；ψ 与 $\tilde{\psi}$ 的对称性和反对称性。除了这些特性的研究外，我们还讨论对称小波与线性相位滤波之间的关系。

5.1 多分辨分析

如果某个小波 $\psi\in L^2(\mathbb{R})$已经被构造，那么，研究它生成$L^2(\mathbb{R})$分解的结构是适宜的。像通常那样，令 $\psi_{j,k}(x):=2^{j/2}\psi(2^jx-k)$和

$$W_j:=\operatorname{clos}_{L^2(\mathbb{R})}<\psi_{j,k}:k\in\mathbb{Z}> \tag{5.1.1}$$

于是，这个 $L^2(\mathbb{R})$的子空间族给出 $L^2(\mathbb{R})$的一种直和分解；在这个意义上讲，每个 $f\in L^2(\mathbb{R})$有一种唯一的分解

$$f(x)=\cdots+g_{-1}(x)+g_0(x)+g_1(x)+\cdots \tag{5.1.2}$$

其中 $g_j\in W_j$，对于所有 $j\in\mathbb{Z}$，并且可写出

$$L^2(\mathbb{R})=\dot{\sum_{j\in\mathbb{Z}}}W_j:=\cdots\dot{+}W_{-1}\dot{+}W_0\dot{+}W_1\dot{+}\cdots \tag{5.1.3}$$

以描述这个结论（见公式(1.4.3)-(1.4.5)）。在 W_j 中，f 的分量 g_j 有唯一的小波级数表示。其中，系数序列利用 f 与作为基小波 ψ

的对偶 $\tilde{\psi}$ 的积分小波变换(见定理 3.27)给出 f 在第 j 个倍频程(或频带)的局部谱信息。在 5.4 节中,我们将再讨论这个题目。使用公式(5.1.3)中 $L^2(\mathbb{R})$ 的分解,还用

$$V_j := \cdots \dot{+} W_{j-2} \dot{+} W_{j-1} \tag{5.1.4}$$

定义的 $L^2(\mathbb{R})$ 的闭子空间 V_j,$j\in\mathbb{Z}$,的一个嵌套序列。我们在下面总结 $\{V_j\}$ 的性质,这些性质是公式(5.1.1),(5.1.3)与(5.1.4)的简单推论(见 1.5 节)。

引理 5.1 根据公式(5.1.4)定义的子空间 V_j 满足:

(1°) $\cdots\subset V_{-1}\subset V_0\subset V_1\subset\cdots$

(2°) $\mathrm{clos}_{L^2}(\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j)=L^2(\mathbb{R})$

(3°) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j=\{0\}$

(4°) $V_{j+1}=V_j\dot{+}W_j$, $j\in\mathbb{Z}$

(5°) $f(x)\in V_j\Leftrightarrow f(2x)\in V_{j+1}$, $j\in\mathbb{Z}$

现在,假定存在一个函数 $\phi\in V_0$ 使

$$\{\phi(\cdot-k):k\in\mathbb{Z}\} \tag{5.1.5}$$

是具有 Riesz 界 A 与 B 的 V_0 的一个 Riesz 基(见公式(3.6.7))。然后,使

$$\phi_{j,k}(x):=2^{j/2}\phi(2^jx-k) \tag{5.1.6}$$

由公式(5.1.4),(5.1.1)和上面(5°)得到,对于每个 $j\in\mathbb{Z}$,族

$$\{\phi_{j,k}:k\in\mathbb{Z}\}$$

也是具有相同 Riesz 界 A 与 B 的 V_j 的一个 Riesz 基。作为一个推论,空间 V_j 还具有下述性质:

(6°) $f\in V_j\Leftrightarrow f(x+\frac{1}{2^j})\in V_j$, $j\in\mathbb{Z}$

已经看到,为了构造一个小波 ψ,我们总可得出满足性质

(1°)—(5°)的 $L^2(\mathbb{R})$子空间的一个嵌套序列$\{V_j\}$。所以,这些性质可看作对于一个小波 ψ 存在的必要条件。我们将要研究的方法是,首先构造所谓的"尺度函数"$\phi \in L^2(\mathbb{R})$,它"生成"$L^2(\mathbb{R})$的闭子空间的一个序列(这个序列也叫 V_j,在此时这些子空间不再通过某个$\psi(x)$用公式(5.1.4)定义,而 ψ 的存在仍有待研究)。更确切地说,有下述定义。

定义 5.2 一个函数$\phi \in L^2(\mathbb{R})$称为一个尺度函数,如果用

$$V_j := \operatorname{clos}_{L^2(\mathbb{R})} < \phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z} >, \quad j \in \mathbb{Z} \tag{5.1.7}$$

定义的 $L^2(\mathbb{R})$的子空间 V_j(其中使用了在公式(5.1.6)中的记号)满足在本节上面叙述的性质(1°),(2°),(5°)与(6°),并且如果$\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$是 V_0 的一个 Riesz 基。还说,尺度函数ϕ生成一个 $L^2(\mathbb{R})$的多分辨分析$\{V_j\}$。

附注 如果$\phi \in L^2(\mathbb{R})$是生成一个 $L^2(\mathbb{R})$的 MRA$\{V_j\}$,那么 MRA 子空间的嵌套序列$\{V_j\}$必须满足在(3°)中的性质。这个性质的证明需要做一点工作而不在这里讨论。(见第七章中引理 7.13 证明中的公式(7.2.29))。另外,像在(4°)中一样,引入补子空间 W_j 总是可能的。然而,我们总假定这些子空间对于所有 $j \in \mathbb{Z}$ 是"始终如一"地被选择。例如,如果 $W_0 \perp V_0$,那么要求 $W_j \perp V_j$,$j \in \mathbb{Z}$。一般来说,如果 W_0 用某个 ψ 在 $j=0$ 的公式(5.1.1)意义上生成,那么,所有其它的子空间 W_j 采取用同一 ψ 类似地生成。总之,在任一 $L^2(\mathbb{R})$的 MRA 的$\{V_j\}$中,所有的性质(1°)~(6°)都存在。

如果ϕ生成一个 MRA,那么,因为$\phi \in V_0$ 也属于 V_1,并且因为$\{\phi_{1,k} : k \in \mathbb{Z}\}$是 V_1 的一个 Riesz 基,所以存在唯一 ℓ^2 序列$\{p_k\}$,这个序列$\{p_k\}$描述尺度函数ϕ的"两尺度关系"

$$\phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k \phi(2x - k) \tag{5.1.8}$$

（对于 m 阶基数 B-样条的两尺度关系，见公式（4.3.1）与（4.3.3）（4.3.4）。）这个序列 $\{p_k\}$ 称为 ϕ 的"两尺度序列"。相应于这个 ℓ^2 序列，引入记号

$$P(z)=P_\phi(z):=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}p_kz^k \qquad (5.1.9)$$

这个记号不同于与公式（4.5.9）中的符号记号在于 1/2 的规范化常数用来定义 P。这个规范化简化了恒等式（5.1.8）的下述 Fourier 变换公式：

$$\hat{\phi}(\omega)=P(z)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad z=e^{-i\omega/2} \qquad (5.1.10)$$

我们称 $P=P_\phi$ 是尺度函数 ϕ 的"两尺度符号"。

为了能够导出 $L^2(\mathbb{R})$ 尺度函数 ϕ 的某些希望的性质，以及后边的相应的小波 ψ 与对偶小波 $\tilde{\psi}$ 的性质，我们作出关于 ϕ 与其两尺度序列的下述假设：

(A1) $\qquad \phi\in L^1(\mathbb{R})$

(A2) $\qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty}\phi(x-k)=1$, 几乎处处

(A3) $\qquad \{p_k\}\in\ell^1$

（A2）的假设称为 ϕ 的"单位划分"性质，它是为导出在（2°）中空间 V_j 的稠密性的一个标准（虽然不是必要的）假设。（见定理4.16的证明）。注意，每个基数 B-样条满足（A2）。正如定理 2.2(ii)保证那样，假设（A1）推出 $\hat{\phi}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个连续函数。因此，由推论2.27和公式（2.5.11）中的 Poisson 求和公式得到，（A2）是下述关于 $\hat{\phi}$ 条件的一个推论：

$$\begin{cases}\hat{\phi}(0)=1\\ \hat{\phi}(2\pi k)=0, \quad 0\neq k\in\mathbb{Z}\end{cases} \qquad (5.1.11)$$

(对于 m 阶基数 B-样条的一个更定性的描述见公式(4.5.5)。)通常，因为 ϕ 生成 V_0 的一个 Riesz 基。由公式(5.1.8)，用规范化 $\hat{\phi}(0)=1$，(A2)就得到。最后，(A3)的假设保证，$P=P_\phi$ 是一个在单位圆 $|z|=1$ 上的连续函数。这是一个很弱的假设，在应用中，感兴趣的是有限序列，使相应的 $P=P_\phi$ 是一个 Laurent 多项式。这个进一步的假设在下节中讨论。

由 $P=P_\phi$ 在 $|z|=1$ 上的连续性和公式(5.1.11)中的第一个条件，并且应用公式(5.1.10)，有

$$P(1)=\frac{1}{2}\sum_k p_k=1 \tag{5.1.12}$$

另一方面，由假设得到，$\{\phi(\cdot-k):k\in\mathbb{Z}\}$ 是 V_0 的一个 Riesz 基而且由公式(5.1.11)中 ϕ 的第二个条件得到，$P(z)$ 还满足

$$P(-1)=\frac{1}{2}\sum_k(-1)^k p_k=0 \tag{5.1.13}$$

的确，根据定理 3.24 和 $\hat{\phi}$ 的连续性，我们有

$$\sum_k|\hat{\phi}(x+2\pi k)|^2\geqslant A>0,\quad x\in\mathbb{R}$$

所以，$\hat{\phi}((2k_0+1)\pi)\neq 0$ 对于某个 $k_0\in\mathbb{Z}$ 成立，因此，公式(5.1.10)的两边在 $\omega=2(2k_0+1)\pi$ 计算就得到公式(5.1.13)。当然，公式(5.1.12)与(5.1.13)的一个等价的叙述是

$$\sum_k p_{2k}=\sum_k p_{2k+1}=1 \tag{5.1.14}$$

作为 $\hat{\phi}$ 的连续性和条件 $\hat{\phi}(0)=1$ 的另一个推论我们注意到，通过反复应用公式(5.1.10)，当 $n\to\infty$ 时

$$\hat{\phi}(\omega) = (\prod_{k=1}^{n} P(e^{-i\omega/2^k}))\, \hat{\phi}(\frac{\omega}{2^n}) \to \prod_{k=1}^{\infty} P(e^{-i\omega/2^k})$$

$$\omega \in \mathbb{R} \qquad (5.1.15)$$

只要无穷乘积按点收敛。在讨论下述例子以后，再返回到收敛的论证。

例子 5.3 对于 m 阶基数 B-样条 N_m，有

$$P(z) = P_{N_m}(z) = (\frac{1+z}{2})^m \qquad (5.1.16)$$

（见(4.3.3)）所以

$$\prod_{k=1}^{n} P(e^{-i\omega/2^k}) = \prod_{k=1}^{n} (\frac{1+e^{-i\omega/2^k}}{2})^m$$

$$= \prod_{k=1}^{n} (\frac{1+e^{-i\omega/2^k}}{2} \cdot \frac{1-e^{-i\omega/2^k}}{1-e^{-i\omega/2^k}})^m$$

$$= \prod_{k=1}^{n} (\frac{1}{2} \cdot \frac{1-e^{-i\omega/2^{k-1}}}{1-e^{-i\omega/2^k}})^m$$

$$= \frac{1}{2^{mn}} (\frac{1-e^{-i\omega}}{1-e^{-i\omega/2}} \frac{1-e^{-i\omega/2}}{1-e^{-i\omega/2^2}} \cdots \frac{1-e^{-i\omega/2^{n-1}}}{1-e^{-i\omega/2^n}})^m$$

$$= \frac{1}{2^{mn}} (\frac{1-e^{-i\omega}}{1-e^{-i\omega/2^n}})^m \to (\frac{1-e^{-i\omega}}{i\omega})^m$$

当 $n \to \infty$ 时，这个极限与公式(3.2.16)中 $\hat{N}_m(\omega)$ 的公式相同。 ●

由于前面样条的例子，把注意力集中到用

$$P(z) = \frac{1}{2}\sum_k p_k z^k = (\frac{1+z}{2})^N S(z) \qquad (5.1.17)$$

给出的控制序列 $\{p_k\}$ 的两尺度方程，其中 N 是某个正整数，$S(1)$

$=1$，并且 $S(z)$ 在单位圆 $|z|=1$ 上充分光滑。

定义 5.4 一个形如公式(5.1.17)的 Laurent 级数称为是一个"容许的两尺度符号"，如果 S 是满足下述条件的单位圆上的一个连续函数：

(i) $S(1)=1$

(ii) 作为 ω 的一个函数，像公式(2.4.23)一样 $S(e^{-i\omega})$ 的 $L^\infty(0,2\pi)$ 连续模，对于某个 α，$0<\alpha\leqslant 1$，当 $\eta\to 0^+$ 时是 $O(\eta^\alpha)$ 阶的。

对于像公式(5.1.17)中具有因子 S 的任一容许两尺度符号 P，考虑用

$$\begin{cases} B_j = B_j(S) := \sup\limits_{\omega\in\mathbb{R}} \left| \prod\limits_{k=1}^{j} S(e^{-i\omega/2^k}) \right| \\ b_j = b_j(S) := \dfrac{1}{j}\log_2 B_j = \dfrac{1}{j\ln 2}\ln B_j \end{cases} \tag{5.1.18}$$

定义的界 $B_j=B_j(S)$ 与 $b_j=b_j(S)$。

我们有下述收敛结果。

定理 5.5 令 P 是形如公式(5.1.17)的一个容许两尺度符号，那么，无穷乘积

$$g(\omega) := \prod_{k=1}^{\infty} P(e^{-i\omega/2^k}) \tag{5.1.19}$$

几乎处处按点收敛于某个函数 g。而且，对于每个正整数 n_0，存在某个正常数 C_{n_0} 使极限函数 g 满足

$$|g(\omega)| \leqslant C_{n_0}(1+|\omega|)^{-N+b_{n_0}}, \quad \omega\in\mathbb{R} \tag{5.1.20}$$

其中 b_{n_0} 用公式(5.1.18)定义。特别是，如果存在某个 n_0 使 $b_{n_0}<N-\frac{1}{2}$，那么存在一个函数 $\hat{\phi}\in L^2(\mathbb{R})$ 使 $\hat{\phi}=g$，$\hat{\phi}(0)=1$，并且 ϕ 满足两

尺度关系公式(5.1.10)。

证明 对于任一固定的ω,因为$S(1)=1$并且$S(e^{-i\omega})$的$L^{\infty}(0,2\pi)$连续模是$O(\eta^{\alpha})$阶的,$0<\alpha\leqslant 1$,我们有

$$|1-S(e^{-i\omega/2^k})|=O\left(\frac{|\omega|^{\alpha}}{2^{k\alpha}}\right),\quad k\to\infty$$

因此,因为$\Sigma(|\omega|^{\alpha}/2^{k\alpha})<\infty$和

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{K}|S(e^{-i\omega/2^k})| &= \exp\{\sum_{k=1}^{K}\ln|1-(1-S(e^{-i\omega/2^k}))|\} \\ &= \exp\{O(\sum_{k=1}^{K}\frac{|\omega|^{\alpha}}{2^{k\alpha}})\}\end{aligned}\qquad (5.1.21)$$

由此得到,无穷乘积

$$\prod_{k=1}^{\infty}S(e^{-i\omega/2^k})$$

是收敛的。所以,由例子5.3,公式(5.1.19)中的无穷乘积对于每个ω收敛。

为建立公式(5.1.20)中的估计,首先注意到由例子5.3,有

$$\left|\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1+e^{-i\omega/2^k}}{2}\right)^N\right|=\left|\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right|^N\leqslant C'(1+|\omega|)^{-N}$$

(5.1.22)

其次,对于任一固定的ω,有相应的一个唯一$n\in\mathbb{Z}$,使$2^{n-1}<1+|\omega|\leqslant 2^n$。一方面,因为对于所有$k\geqslant n$,有$|\omega/2^k|\leqslant 1$,上述估计给出

$$\left|\prod_{k=n+1}^{\infty} S(e^{-i\omega/2^k})\right| \leqslant C''$$

其中 C'' 与 ω 无关。因此，写 $C''' = C'C''$，使用公式(5.1.22)，可得出结论

$$|g(\omega)| \leqslant C'''(1+|\omega|)^{-N}\prod_{k=1}^{n}|S(e^{-i\omega/2^k})| \tag{5.1.23}$$

另一方面，使用公式(5.1.18)，对于任一固定的正整数 n_0 和所有大的 $n>0$，我们有

$$\prod_{k=1}^{n}|S(e^{-i\omega/2^k})| = \prod_{k=1}^{n_0}|S(e^{-i\omega/2^k})|\prod_{k=n_0+1}^{2n_0}|S(e^{-i\omega/2^k})|\cdots$$

$$\prod_{k=\left[\frac{n}{n_0}\right]n_0+1}^{n}|S(e^{-i\omega/2^k})| \tag{5.1.24}$$

$$\leqslant C'_{n_0}B_{n_0}^{\left[\frac{n}{n_0}\right]} \leqslant C''_{n_0}B_{n_0}^{n/n_0}$$

因为

$$n-1 < \log_2(1+|\omega|) \leqslant n$$

由此得到

$$B_{n_0}^{n/n_0} \leqslant C'''_{n_0}B_{n_0}^{\log_2(1+|\omega|)/n_0} = C'''_{n_0}(1+|\omega|)^{b_{n_0}}$$

因此，记 $C_{n_0} := C'''C''_{n_0}C'''_{n_0}$，那么公式(5.1.20)中的论断是公式(5.1.22)与(5.1.24)的一个推论。

如果 $b_{n_0}<N-\frac{1}{2}$，那么由公式(5.1.20)，看到 $g\in L^2(\mathbb{R})$；并且用定理 2.17 中建立的 Fourier 变换的 $L^2(\mathbb{R})$ 等距，对于某个

$\phi\in L^2(\mathbb{R})$，有 $g=\hat{\phi}$。另外，由估计公式(5.1.21)与(5.1.22)很明显 $\hat{\phi}\in C$，所以 $\hat{\phi}(0)=g(0)=P(1)=1$，并且

$$P(e^{-i\omega/2})\,\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)=P(e^{-i\omega/2})\prod_{k=1}^{\infty}P(e^{-i\omega/2^{k+1}})$$

$$=\prod_{k=1}^{\infty}P(e^{-i\omega/2^k})$$

$$=\hat{\phi}(\omega)$$

这就完成了定理的证明。 ●

注意，前边的定理没有给出关于ϕ的连续性和它是否生成 V_0 的一个 Riesz 基的任何信息。事实上，没有对两尺度符号 P 施加任何附加的条件，因为得出关于尺度函数ϕ是否生成 V_0 的一个 Riesz 基的任何结论都是很困难的。这个问题的讨论放到第七章，其中要求$\{\phi(\cdot-k):k\in\mathbb{Z}\}$是一个规范正交族。下面，我们只涉及尺度函数$\phi$的光滑性。

定理 5.6 在定理 5.5 的假设下，如果

$$b:=\inf\{b_j:j\geq 1\} \tag{5.1.25}$$

满足 $b<N-1$，那么公式(5.1.19)中的极限函数 g 属于 $L^2(\mathbb{R})\cap L^1(\mathbb{R})$，而且定理 5.5 中陈述的满足 $\hat{\phi}=g$ 的函数$\phi\in L^2(\mathbb{R})$ 属于 $C^\beta(\mathbb{R})$，其中 β 是严格小于 $N-b-1$ 的最大整数。因此，对于任一 $\alpha>0$，$0<\beta+\alpha<N-b-1$，$\phi^{(\beta)}$满足

$$\sup_{0<h\leq\eta}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\phi^{(\beta)}(x+h)-\phi^{(\beta)}(x)\right|=O(\eta^\alpha),\quad \eta\to 0^+$$

定义 5.7 满足

$$\sup_{0<h\leq\eta}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f(x+h)-f(x)\right|=O(\eta^\alpha),\quad \eta\to 0^+ \tag{5.1.26}$$

的所有函数 $f\in C=C(\mathbb{R})$ 的类用 $\mathrm{Lip}\alpha$ 表示，其中 $0<\alpha\leqslant 1$；并且函数 $f\in C^m=C^m(\mathbb{R})$，其中 m 是正整数，使 $f^{(m)}\in\mathrm{Lip}\alpha$，$0<\alpha\leqslant 1$，的类用 $\mathrm{Lip}^m\alpha$ 表示。

定理 5.6 的证明 选一个正整数 n_0 使

$$0<\beta+\alpha<N-b_{n_0}-1$$

注意，根据 β 的定义，有 $0<\alpha<1$；并且根据定理 5.5 中公式 (5.1.20)，可看到

$$(1+|\omega|)^\beta|\hat{\phi}(\omega)|\leqslant C_{n_0}(1+|\omega|)^{-1-\alpha} \quad (5.1.27)$$

因此，Lebesgue 控制收敛定理允许在公式

$$\phi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix\omega}\hat{\phi}(\omega)d\omega$$

的积分里边微分 β 次，得到 $\phi\in C^\beta$ 和

$$\phi^{(\beta)}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(i\omega)^\beta e^{ix\omega}\phi(\omega)d\omega \quad (5.1.28)$$

现在，由估计

$$\begin{aligned}|e^{i(x+h)\omega}-e^{ix\omega}|&\leqslant\min(2,|h\omega|)\\&\leqslant 2^{1-\alpha}|h\omega|^\alpha\leqslant 2|h|^\alpha(1+|\omega|)^\alpha\end{aligned}$$

与公式(5.1.27)和(5.1.28)一起，得出

$$\begin{aligned}&|\phi^{(\beta)}(x+h)-\phi^{(\beta)}(x)|\\&\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\omega|^\beta|e^{i(x+h)\omega}-e^{ix\omega}||\hat{\phi}(\omega)|d\omega\\&\leqslant C_{n_0}\frac{|h|^\alpha}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\omega|)^{\beta+\alpha-N+b_{n_0}}d\omega\end{aligned}$$

其中积分是有限的，因为 $\beta+\alpha-N+b_0<-1$。因此，就证明了 $\phi\in \mathrm{Lip}^{\gamma}\alpha$。 ●

5.2 有限两尺度关系的尺度函数

本节，我们把注意力限制到用有限和描述的两尺度关系公式(5.1.8)。这个限制的一个很重要的结论是相应的尺度函数必定有紧支撑。因此，像我们将在本节看到的那样，对于 4.3 节中基数 B-样条的图形显示算法还用于描绘任何在实时中引出级数

$$f(x)=\sum_{l}a_l\,\phi(x-l) \tag{5.2.1}$$

的图形，其中ϕ是任一这样的尺度函数。我们还将研究产生同一多分辨分析的具有有限两尺度关系的所有尺度函数的类，并且研究具有最小支撑的所有尺度函数类。这在揭示正在研究中的 MRA 的基本结构中是重要的，并且最小支撑尺度函数有助于构造有较小支撑的小波。很明显，一个尺度函数ϕ及其相应的小波 ψ 的支撑越小，用于小波重构算法中的重构序列(见(1.6.2))就变得越短(更详细地讨论，见本章后边的 5.4 节)。

令ϕ是用两尺度关系

$$\phi(x)=\sum_{k=0}^{N_\phi}p_k^{\phi}\,\phi(2x-k),\quad p_0^{\phi}\cdot p_{N_\phi}^{\phi}\neq 0 \tag{5.2.2}$$

描述的尺度函数。当不可能产生混淆时，我们将去掉下标或上标ϕ，写成

$$\begin{cases}p_k:=p_k^{\phi}\\ N:=N_\phi\end{cases} \tag{5.2.3}$$

注意，通过改变 p_k 的指标，任何有限两尺度关系都能写成公式(5.2.2)的形式。当然，尺度函数ϕ还必须相应地位移。

首先处理公式(5.2.2)中 $N_\phi=0,1$ 情况。

(i) 对于 $N_\phi=0$，根据公式(5.1.12)，我们有

$$\phi(x) = 2\,\phi(2x)$$

所以，两尺度符号是 $P(z)=1$，并且公式(5.1.19)中对于所有 ω 无穷乘积是 $g(\omega)=1$。于是，如果 $g=\hat{\phi}$，那么 ϕ 必定是 δ 分布。

(ii) 对于 $N_\phi=1$，根据公式(5.1.14)，我们有

$$\phi(x) = \phi(2x) + \phi(2x-1)$$

这个与公式(4.3.4)中一阶基数 B-样条的两尺度关系是相同的。所以，$\phi=N_1$。

因此，总是假定 $N_\phi\geqslant 2$。在下面，一个迭代过程将用于构造尺度函数 ϕ。为此目的，我们只涉及处处连续的尺度函数。在这个附加的假设下，还能够证明，对于 $N_\phi=2$，两尺度关系必定用

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\,\phi(2x) + \phi(2x-1) + \frac{1}{2}\,\phi(2x-2) \quad (5.2.4)$$

给出，这与公式(4.3.4)中对于 $m=2$ 的二阶基数 B-样条 N_2 的两尺度关系恒等，因此，$\phi=N_2$。然而，对于 $N_\phi\geqslant 3$，我们将在第七章中看到一些很有意义的变化。例如，当 $N_\phi=3$ 时，我们当然总有两尺度方程是

$$\begin{aligned} N_3(x) = {} & \frac{1}{4}N_3(2x) + \frac{3}{4}N_3(2x-1) \\ & + \frac{3}{4}N_3(2x-2) + \frac{1}{4}N_3(2x-3) \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

的二次基数 B-样条 N_3，然而，有另外的选择，即用

$$\phi_3^D(x) = \frac{1+\sqrt{3}}{4}\phi_3^D(2x) + \frac{3+\sqrt{3}}{4}\phi_3^D(2x-1) \quad (5.2.6)$$

$$+ \frac{3-\sqrt{3}}{4}\phi_3^D(2x-2) + \frac{1-\sqrt{3}}{4}\phi_3^D(2x-3)$$

控制的 Daubechies 的尺度函数ϕ_3^D。关于ϕ_3^D的更详细的论述在第七章中给出。这里，我们仅指出公式(5.2.6)中两尺度序列的两个基本的性质。首先，像公式(5.1.14)中要求的那样，有

$$\begin{cases} p_0 + p_2 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3-\sqrt{3}}{4} = 1 \\ p_1 + p_3 = \dfrac{3+\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1-\sqrt{3}}{4} = 1 \end{cases} \quad (5.2.7)$$

第二，

$$P(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{3} p_k z^k \quad (5.2.8)$$

$$= \frac{1}{2}\{\frac{1+\sqrt{3}}{4} + \frac{3+\sqrt{3}}{4}z$$

$$+ \frac{3-\sqrt{3}}{4}z^2 + \frac{1-\sqrt{3}}{4}z^3\}$$

$$= \left(\frac{1+z}{2}\right)^2\left[\frac{(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})z}{2}\right]$$

这满足定义 5.4 中容许性条件，对于 $N=2$ 和 $S(z)$是 ω 的一个三角多项式，有 $S(1)=1$。

为更好地理解一个尺度函数ϕ，对于某个合适的初始函数ϕ_0，考虑递推方案

$$\phi_n(x) = \sum_k p_k \phi_{n-1}(2x-k), \quad n=1,2,\cdots \qquad (5.2.9)$$

研究公式(5.2.9)的 Fourier 变换公式(见公式(5.1.10)),并且遵循公式(5.1.15)中同样的过程,我们有

$$\hat{\phi}_n(\omega) = P(e^{-i\omega/2})\hat{\phi}_{n-1}(\frac{\omega}{2}) = \cdots \qquad (5.2.10)$$

$$= \{\prod_{k=1}^{n} P(e^{-i\omega/2^k})\}\hat{\phi}_0(\frac{\omega}{2^n})$$

因此,如果 P 是一个容许的两尺度符号并且初始选择的ϕ_0的 Fourier 变换在 $\omega=0$ 是连续的并且满足$\hat{\phi}_0(0)=1$,那么根据定理 5.5,公式(5.2.10)的两边对于任一 $\omega \in \mathbb{R}$ 收敛,并且

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\phi}_n(\omega) = g(\omega)$$

其中 g 是公式(5.1.19)中给出的无穷积。另外,如果两尺度符号 P 还满足 $b<N-1$,其中 b 与 N 分别用公式(5.1.25)和(5.1.17)给出,于是,根据定理 5.5 与 5.6,我们有 $g=\hat{\phi}$,其中$\phi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$属于 $\mathrm{Lip}^\beta \alpha$,而 $0<\alpha<1$ 和 β 是满足 $0<\beta+\alpha<N-b-1$ 的最大整数(见定义 5.7)。因此,在这些条件下,一个尺度函数ϕ能够用递推方案公式(5.2.9)通过取ϕ_n的极限得到。我们将立即概略地证明这一结论。由于前面关于情况(i)与(ii)的讨论,我们看到,对于具有至少三个非零项的两尺度序列,二阶基数 B-样条 N_2 是最低阶的一个连续样条函数,它对产生尺度函数ϕ提供了作为公式(5.2.9)中初始函数的一个良好的选择。也就是说,我们推荐下述递推方案:

$$
\begin{cases}
\phi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \phi_n(x) \\
\text{其中} \\
\phi_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{N_\phi} p_k^\phi \phi_{n-1}(2x-k),\ n = 1,2,\cdots \\
\phi_0(x) = N_2(x)
\end{cases}
\tag{5.2.11}
$$

事实上，在上述关于两尺度符号 P 的假设下，这个递推方案是一致收敛的。

证明概述　令 $\varepsilon>0$。因为 $\hat{\phi}\in L^1(\mathbb{R})$，对于所有充分大的值 $M>0$，有

$$\int_{|\omega|\geqslant M} |\hat{\phi}(\omega)|d\omega < \varepsilon$$

并且，对于任一固定的 M 值

$$\lim_{n\to\infty} \| \chi_{[-M,M]}(\hat{\phi}_n - g) \|_{L^1(\mathbb{R})} = 0$$

另一方面，因为

$$\hat{\varphi}_n(\omega) = \{\prod_{k=1}^{n} P(e^{-i\omega/2^k})\}(\frac{\sin\omega/2^{n+1}}{\omega/2^{n+1}})^2 e^{-i\omega/2^n}$$

通过应用和公式(5.1.24)的同样估计，有

$$\int_{M\leqslant\omega\leqslant 2^n\pi} |\hat{\phi}_n(\omega)|d\omega \geqslant C\int_{|\omega|\geqslant M} \frac{d\omega}{(1+|\omega|)^{1+\eta}}$$

$$\leqslant \frac{C'}{M^\eta} < \varepsilon$$

其中 $0<\eta<N-b-1$ 且 M 是充分大的。最后

$$\prod_{k=1}^{n} P(e^{-i\omega/2^k})$$

的周期性可用来得到

$$\int_{|\omega|>2^n\pi} |\hat{\phi}(\omega)| d\omega$$

$$= \sum_{k\neq 0} \int_{|\omega|\leqslant 2^n\pi} \left|\prod_{k=1}^{n} P(e^{-i\omega/2^k})\right| \left(\frac{\sin(\omega/2^{n+1})}{2^{-n-1}\omega + k\pi}\right)^2 d\omega \to 0$$

并且一致收敛可由 $|\phi_n(x)-\phi(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \| \hat{\phi}_n - \hat{\phi} \|_{L^1(\mathbb{R})}$ 得到。 ●

作为公式(5.2.11)中过程的一个推论，ϕ具有紧支撑，并且事实上，我们能够精确地求出它的支撑，只要ϕ是连续的。注意，supp ϕ_n的确随着 n 单调增长，这是有意义的。更确切地说，通过简单的计算，有

$$\begin{cases} \text{supp } \phi_0 = [0,2] \\ \text{supp } \phi_1 = [0, \frac{1}{2}(2+N_\phi)] = [0, \frac{2+N_\phi}{2}] \\ \text{supp } \phi_2 = [0, \frac{1}{2}(\frac{2+N_\phi}{2} + N_\phi)] \\ \qquad = [0, \frac{2+(2^2-1)N_\phi}{2^2}] \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \text{supp } \phi_n = [0, \frac{2+(2^n-1)N_\phi}{2^n}] \end{cases} \tag{5.2.12}$$

同时，因为 $N_\phi \geqslant 2$，有

$$\text{supp } \phi_n \subseteq [0, N_\phi], \quad n = 1,2,\cdots$$

并且由公式(5.2.11)与(5.2.12)得到

$$\operatorname{supp}\phi = [0, N_\phi] \tag{5.2.13}$$

正如在公式(5.2.13)中一样，知道ϕ的支撑是$[0, N_\phi]$，在计算$\phi(x)$，至少在计算所有二进点$x=k/2^j$，其中$j,k\in\mathbb{Z}$,的$\phi(x)$值时是有极大的帮助。这显然要求助于两尺度关系公式(5.2.2)。事实上，如果$\phi(1),\cdots,\phi(N_\phi-1)$的值是已知的，那么，因为对于所有$k\leqslant 0$或$k\geqslant N_\phi$有$\phi(k)=0$，关系式

$$\begin{cases} \phi(\frac{k}{2}) = \sum_l p_l^\phi\, \phi(k-l) \\ \phi(\frac{k}{2^2}) = \sum_l p_l^\phi\, \phi(\frac{k}{2}-l) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

唯一地确定$\phi(x)$在$x=k/2^j$，$j,k\in\mathbb{Z}$,的所有值。

为了确定$\phi(k)$的值，$k\in\mathbb{Z}$，再次使用x是一个整数的两尺度关系。即用矩阵记号，有

$$\boldsymbol{m} = M\boldsymbol{m} \tag{5.2.14}$$

其中$\boldsymbol{m}$是列向量

$$\boldsymbol{m} := [\phi(1)\cdots\phi(N_\phi - 1)]^T \tag{5.2.15}$$

而M是$(N_\phi-1)\times(N_\phi-1)$矩阵

$$M := [p_{2j-k}^\phi]_{1\leqslant j,k\leqslant N_\phi-1} \tag{5.2.16}$$

以j表示行指标而k表示列指标。回忆ϕ生成一个单位划分（见在(5.1)节中(A.2))，可这样简单地决定$\phi(k)$，$k\in\mathbb{Z}$,的值：在公式(5.2.14)中，相应于特征值1求特征向量$\boldsymbol{m}$并且施加规范化条件

$$\phi(1) + \cdots + \phi(N_\phi - 1) = 1 \tag{5.2.17}$$

例子 5.8 确定$\phi_3^D(k)$的值，$k\in \mathbb{Z}$，其中ϕ_3^D的两尺度关系用公式(5.2.6)给出。

解 根据公式(5.2.6)，有$N_\phi=3$而且公式(5.2.16)中的矩阵M变为

$$M = \begin{bmatrix} p_1^\phi & p_0^\phi \\ p_3^\phi & p_2^\phi \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3+\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} \end{bmatrix} \tag{5.2.18}$$

很容易看到，公式(5.2.14)的解空间是

$$\mathbf{m} = a[1+\sqrt{3} \quad 1-\sqrt{3}]^T, \quad a \in \mathbb{R}$$

所以，根据规范化条件公式(5.2.17)，我们有$a=\dfrac{1}{2}$并且

$$\begin{cases} \phi_3^D(1) = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \phi_3^D(2) = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \tag{5.2.19}$$

●

当计算出$\phi(k)$，$k\in \mathbb{Z}$，的值，现在就很容易计算

$$\phi(\frac{k}{2^j}), \qquad j,k \in \mathbb{Z} \tag{5.2.20}$$

事实上，插入图形显示算法(见算法 4.7)能够应用，而不需要任何改变，甚至能够在实时中计算任何引起的级数

$$f_{j_0}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l^{(j_0)} \phi(2^{j_0}x - l) \tag{5.2.21}$$

对任何固定的 $j_0\in\mathbb{Z}$,任何 $k\in\mathbb{Z}$ 与任何 $j_1\geqslant j_0$ 在 $x=k/2^{j_1}$。因此,为了计算公式(5.2.20)中的 $\phi(k/2^j)$,简单地把这个算法应用于 $j_0=0$ 与 $a_l^{(0)}=\delta_{l,0}$。当然,人们必须在算法 4.7 中为计算公式(5.2.21)中 f_{j_0}(或显示 f_{j_0} 图形)设

$$\begin{cases} p_{m,k}=p_k \\ w_{m,k}=\phi(k) \end{cases} \tag{5.2.22}$$

现在转到生成相同 $L^2(\mathbb{R})$ 的 MRA$\{V_j\}$ 具有有限两尺度关系的所有尺度函数ϕ的类 Φ 的研究。此外,为了不失其一般性,可以假定任何$\phi\in\Phi$ 的两尺度关系都取公式(5.2.2)的形式,因此,根据公式(5.2.13),ϕ的支撑的确是区间$[0,N_\phi]$。所以,$\phi^*\in\Phi$ 具有最小支撑如且仅如

$$N_{\phi^*}\leqslant N_\phi \qquad \phi\in\Phi \tag{5.2.23}$$

相应于任一$\phi\in\Phi$,考虑在定义 2.9 中引入的自相关函数

$$F_\phi(x):=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x+y)\overline{\phi(y)}dy \tag{5.2.24}$$

和序列$\{F_\phi(k)\}$的符号,即

$$E_\phi(z):=\sum_{k\in\mathbb{Z}}F_\phi(k)z^k \tag{5.2.25}$$

因为 F_ϕ 显然满足

$$\begin{cases} F_\phi(-x)=\overline{F_\phi(x)}, \quad x\in\mathbb{R} \\ \operatorname{supp}F_\phi\subseteq[-N_\phi,N_\phi] \end{cases} \tag{5.2.26}$$

由此得到 E_ϕ 是一个 Laurent 多项式。令 k_ϕ 表示 E_ϕ 的“单边次数”,即 k_ϕ 是对于 $F_\phi(k_\phi)\neq0$ 的最大整数。于是

$$\Pi_\phi(z):=z^{k_\phi}E_\phi(z) \tag{5.2.27}$$

是一个 $2k_\phi$ 次(关于 z)的一个(代数)多项式。关于$\prod_\phi$的"倒数多项式"用

$$\prod_\phi^r(z) := z^{2k_\phi}\overline{\prod_\phi\left(\frac{1}{\bar z}\right)} \tag{5.2.28}$$

给出。由于公式(5.2.26)中的第一个性质,很明显

$$\prod_\phi^r(z) = \prod_\phi(z), \qquad 所有\ z \tag{5.2.29}$$

我们称$\prod_\phi(z)$为关于ϕ的"广义 Euler-Frobenius 多项式",而 E_ϕ 为关于ϕ的"广义 Euler-Frobenius Laurent 多项式"。(回忆公式(4.2.18)和更普遍的公式(4.6.6),关于基数 B-样条的寻常 Euler-Frobenius 多项式,乘规范化常数常用来给出整系数。)

我们需要下述专门术语。

定义 5.9 令 z_0 是代数多项式 $p(z)$的一个零点(或根)。那么我们称 z_0 是 $p(z)$的一个对称零点(或对称根),如果(i)$z_0\neq 0$ 且(ii)$p(-z_0)=p(z_0)=0$。

在关于有限两尺度序列的尺度函数ϕ的下述定理中,回忆 $P_\phi(z)$表示ϕ的两尺度符号。

定理 5.10 令$\phi\in\Phi$是用公式(5.2.2)控制的任何尺度函数。于是

(i) 在$|z|=1$上,$E_\phi(z)$与$\prod_\phi(z)$都不可能为零;

(ii) 对于所有 $\omega\in\mathbb{R}$

$$E_\phi(e^{-i\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\hat\phi(\omega+2\pi k)\right|^2 \tag{5.2.30}$$

(iii) 对于所有 $\omega\in\mathbb{R}$

$$\left|P_\phi(e^{-i\omega/2})\right|^2 E_\phi(e^{-i\omega/2}) + \left|P_\phi(-e^{-i\omega/2})\right|^2 E_\phi(-e^{-i\omega/2}) = E_\phi(e^{-i\omega}) \tag{5.2.31}$$

(iv) 对于所有的复数 z

$$P_\phi(z)P_\phi^T(z)\prod_\phi(z) + (-1)^{N_\phi-k_\phi}P_\phi(-z)P_\phi^T(-z)$$
$$\prod_\phi(-z) = z^{N_\phi-k_\phi}\prod_\phi(z^2) \quad (5.2.32)$$

(v) P_ϕ 在 $|z|=1$ 上不具有对称零点。

证明 公式(5.2.30)中的恒等式由 Poisson 求和公式(2.5.19)得到。因此,应用定理 3.24,因为 $\{\phi(\cdot-k): k\in\mathbb{Z}\}$ 是 V_0 的一个 Riesz 基,对于所有 $\omega\in\mathbb{R}$,我们有 $E_\phi(e^{-i\omega})\neq 0$。特别是,论断(i)由公式(5.2.27)得到。为了导出公式(5.2.31),从公式(5.2.30)出发并且应用两尺度关系公式(5.2.2)的 Fourier 变换公式,得到

$$\begin{aligned}E_\phi(e^{-i\omega}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}|P_\phi(e^{-i\frac{\omega+2\pi k}{2}})\hat{\phi}(\frac{\omega+2\pi k}{2})|^2\\ &= |P_\phi(e^{-i\omega/2})|^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\hat{\phi}(\frac{\omega+4\pi k}{2})|^2\\ &\quad + |P_\phi(-e^{-i\omega/2})|^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\hat{\phi}(\frac{\omega+2\pi(2k+1)}{2})|^2\\ &= |P_\phi(e^{-i\omega/2})|^2E_\phi(e^{-i\omega/2})\\ &\quad + |P_\phi(-e^{-i\omega/2})|^2E_\phi(-e^{-i\omega/2})\end{aligned}$$

这就建立了(iii)。为了证明(iv),要求公式

$$\overline{P_\phi(\bar{z})} = z^{-N_\phi}P_\phi^T(z) \quad 与 \quad E_\phi(z) = z^{-k_\phi}\prod_\phi(z)$$

对于 $|z|=1$ 成立,并且对于 $z=e^{-i\omega/2}$ 证明公式(5.2.31)等价于证明公式(5.2.32)。现在,因为公式(5.2.32)的两边是整函数(z 的代数多项式),它们必定对于所有 z 是恒等的。

最后，如果 $z_0 \neq 0$ 是 P_ϕ 的一个对称零点，那么，根据公式(5.2.32)，有$\prod_\phi(z_0^2)=0$，所以使用(i)$|z_0|\neq 1$。 ●

我们现在准备给出具有最小支撑的那些$\phi\in\Phi$的一种表征。

定理 5.11 一个尺度函数$\phi^*\in\Phi$具有最小支撑如且仅如它的两尺度符号 P_{ϕ^*} 不具有对称零点。

证明 令$\phi^*\in\Phi$是任意给定的并且考虑它的两尺度符号 P_{ϕ^*} 的因式分解为形式

$$P_{\phi^*}(z) = m_{\phi^*}(z)n_{\phi^*}(z^2) \tag{5.2.33}$$

其中 m_{ϕ^*} 与 n_{ϕ^*} 是满足

$$\begin{cases} m_{\phi^*}(1) = n_{\phi^*}(1) = 1 \\ n_{\phi^*}(0) \neq 0 \\ m_{\phi^*} \quad \text{不具有对称零点} \end{cases} \tag{5.2.34}$$

的多项式。回忆 $\operatorname{supp}\phi^*=[0,N_{\phi^*}]$并且 $N_{\phi^*}=\deg P_{\phi^*}$。还有，由公式(5.2.33)与(5.2.34)可看到，P_{ϕ^*} 没有对称零点如且仅如

$$\deg n_{\phi^*} = 0$$

现在，根据定理 5.10(v)，因为 P_{ϕ^*} 没有位于$|z|=1$ 上的对称零点，所以多项式 n_{ϕ^*} 在$|z|=1$ 上无零点，因而 $n_{\phi^*}^{-1}$ 在$|z|$上是解析的，并且具有 Laurent 表示

$$\frac{1}{n_{\phi^*}(z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n z^n, \quad \{r_n\} \in l^1$$

用

$$\phi^{**}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n \phi^*(x-n) \tag{5.2.35}$$

定义一个函数$\phi^{**}\in V_0$。那么，使用记号 $z=e^{-i\omega/2}$，可以重新把公式

(5.2.35)阐述为

$$\hat{\phi}^{**}(\omega) = \frac{1}{n_{\phi^*}(z^2)} \hat{\phi}^*(\omega) \tag{5.2.36}$$

或

$$\hat{\phi}^*\left(\frac{\omega}{2}\right) = n_{\phi^*}(z)\, \hat{\phi}^{**}\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{5.2.37}$$

现在，应用公式(5.2.36)与(5.2.37)并且使用ϕ^*的两尺度关系，有

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}^{**}(\omega) &= \frac{1}{n_{\phi^*}(z^2)} P_{\phi^*}(z)\, \hat{\phi}^*\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
&= \frac{1}{n_{\phi^*}(z^2)} m_{\phi^*}(z) n_{\phi^*}(z^2)\, \hat{\phi}^*\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
&= m_{\phi^*}(z)\, \hat{\phi}^*\left(\frac{\omega}{2}\right) = m_{\phi^*}(z) n_{\phi^*}(z)\, \hat{\phi}^{**}\left(\frac{\omega}{2}\right)
\end{aligned}$$

这表明，$\phi^{**} \in \Phi$ 和其两尺度符号用

$$P_{\phi^{**}}(z) = m_{\phi^*}(z) n_{\phi^*}(z)$$

给出。所以，由公式(5.2.33)，我们有

$$\begin{aligned}
\deg P_{\phi^{**}} &= \deg m_{\phi^*} + \deg n_{\phi^*} \\
&\leqslant \deg m_{\phi^*} + 2\deg n_{\phi^*} \\
&= \deg P_{\phi^*}
\end{aligned}$$

因此，因为ϕ^*具有最小支撑，必定有 $\deg P_{\phi^{**}} = \deg P_{\phi^*}$，或$\deg n_{\phi^*} = 0$，或等价地，$P_{\phi^*}$ 没有对称零点。

为了证明逆结论，假定$\phi^* \in \Phi$ 并且 P_{ϕ^*} 没有对称零点。那么，由公式(5.2.13)，为了证明ϕ^*具有最小支撑，对于任何$\phi \in \Phi$ 只要

证明

$$\deg P_{\phi} \geqslant \deg P_{\phi^*} \tag{5.2.38}$$

就可以了。因为$\phi^* \in \Phi$,对于某个序列$\{s_n\} \in l^2$可以写成

$$\phi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n \phi^*(x-n) \tag{5.2.39}$$

公式(5.2.39)的 Fourier 变换公式是

$$\begin{cases} \hat{\phi}(\omega) = C(z^2)\hat{\phi}^*(\omega) \\ C(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n z^n, \quad z = e^{-i\omega/2} \end{cases} \tag{5.2.40}$$

通过对公式(5.2.39)的两边取离散 Fourier 变换,我们看到,$C(z)$是一个有理函数,它是$\{\phi(k)\}$的(多项式)符号与$\{\phi^*(k)\}$的(多项式)符号的商。另外,因为由公式(5.2.40)得到

$$|C(z^2)|^2 = \frac{E_{\phi}(z^2)}{E_{\phi^*}(z^2)}$$

所以我们发现,应用定理 5.10(i),有理函数$C(z)$在$|z|=1$上既没有零点也没有极点。现在,我们写

$$\begin{cases} \sum_n \phi(n)z^n = \sum_{n=0}^{N_\phi} \phi(n)z^n = q_\phi(z)d(z) \\ \sum_n \phi^*(n)z^n = \sum_{n=0}^{N_{\phi^*}} \phi^*(n)z^n = q_{\phi^*}(z)d(z) \end{cases} \tag{5.2.41}$$

其中d, q_ϕ, q_{ϕ^*}是具有$q_\phi(0) \neq 0, q_{\phi^*}(0) \neq 0$的多项式,并且$q_\phi, q_{\phi^*}$没有共同的零点。于是,由$\phi$与$\phi^*$的两尺度关系和公式(5.2.40)得到,对于$z=e^{-i\omega/2}$

$$
\begin{aligned}
\hat{\phi}(\omega) &= P_{\phi}(z)\,\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = C(z)P_{\phi}(z)\,\hat{\phi}^{*}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
&= C(z)P_{\phi}(z)\,\frac{1}{P_{\phi^{*}}(z)}\,\hat{\phi}^{*}(\omega) \\
&= \frac{C(z)}{C(z^{2})}\,\frac{P_{\phi}(z)}{P_{\phi^{*}}(z)}\,\hat{\phi}(\omega)
\end{aligned}
$$

因此

$$
P_{\phi}(z) = \frac{C(z^{2})}{C(z)}P_{\phi^{*}}(z) \tag{5.2.42}
$$

另一方面，由公式(5.2.41)和早些时候对 $C(z)$ 的讨论，有

$$
\begin{aligned}
\frac{C(z^{2})}{C(z)} &= \frac{\dfrac{\sum\limits_{n}\phi(n)z^{2n}}{\sum\limits_{n}\phi^{*}(n)z^{2n}}}{\dfrac{\sum\limits_{n}\phi(n)z^{n}}{\sum\limits_{n}\phi^{*}(n)z^{n}}} \qquad (5.2.43) \\
&= \frac{q_{\phi}(z^{2})q_{\phi^{*}}(z)}{q_{\phi}(z)q_{\phi^{*}}(z^{2})}
\end{aligned}
$$

所以，由于 $q_{\phi}(z^{2})$ 与 $q_{\phi^{*}}(z^{2})$ 是互质的，并且由于公式(5.2.42)中的 $P_{\phi}(z)$ 是一个多项式，我们可以断定 $q_{\phi^{*}}(z)P_{\phi^{*}}(z)$ 可用 $q_{\phi^{*}}(z^{2})$ 整除，也就是说

$$
q_{\phi^{*}}(z)P_{\phi^{*}}(z) = r(z)q_{\phi^{*}}(z^{2}) \tag{5.2.44}
$$

其中 $r(z)$ 是某个多项式。

假定 $\deg q_{\phi^*}\geqslant 1$ 并且令 $\{z_1,\cdots,z_p\}$ 是 q_{ϕ^*} 的零点。因为 $q_{\phi^*}(0)\neq 0$，所以有 $z_1,z_2,\cdots,z_p\neq 0$。另外，因为

$$C(z)=\frac{\sum_n \phi(n)z^n}{\sum_n \phi^*(n)z^n}=\frac{q_\phi(z)}{q_{\phi^*}(z)} \qquad (5.2.45)$$

其中 q_ϕ 与 q_{ϕ^*} 是互质的，并且 $C(z)$ 在 $|z|=1$ 上没有零点，也没有极点。可以断定没有 $z_j,j=1,\cdots,p$，位于 $|z|=1$ 上。因此，存在某个 $j_0,1\leqslant j_0\leqslant p$，使 z_{j_0} 的两个平方根 $\pm z'_{j_0}$ 都不属于集 $\{z_1,\cdots,z_p\}$。即，两个多项式 $(z-z'_{j_0})$ 与 $(z+z'_{j_0})$ 的每一个都除不尽 $q_{\phi^*}(z)$，它们的乘积 $(z-z'_{j_0})(z+z'_{j_0})=(z^2-z_{j_0})$ 是 $q_{\phi^*}(z^2)$ 的一个因子。所以，由公式(5.2.44)得到，$(z^2-z_{j_0})$ 是 $P_{\phi^*}(z)$ 的一个因子。因为 $z_{j_0}\neq 0$，P_{ϕ^*} 现在具有一个对称根，这与假设矛盾。因此 q_{ϕ^*} 必定是一个常数。结果，由公式(5.2.42)与(5.2.43)，我们有

$$P_\phi(z)=\frac{q_\phi(z^2)}{q_\phi(z)}P_{\phi^*}(z)$$

并且意味着 $\deg P_\phi\geqslant \deg P_{\phi^*}$。 ●

在定理 5.11 的证明中，实际上已得到了任何 $\phi\in\Phi$ 的若干很好的性质，其中的两个性质叙述如下。

定理 5.12 对于任何 $\phi_1,\phi_2\in\Phi$，在意义

$$\phi_2(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n\phi_1(x-n)$$

上，联系 ϕ_1 与 ϕ_2 的序列 $\{s_n\}$ 的符号 $C(z)$ 是一个有理函数，它在单位圆 $|z|=1$ 上既没有零点，也没有极点。另外，如果 $\phi_1\in\Phi$ 有最小支撑，那么 $C(z)$ 是一个多项式，即，每个 $\phi_2\in\Phi$ 是最小支撑 $\phi_1\in\Phi$ 的整数平移的一个有限线性组合。特别是，最小支撑 $\phi_1\in\Phi$ 是唯一的。

证明 第一个叙述在前面已经证明了。如果ϕ_1具有最小支撑，那么，根据前边的定理，ϕ_1的两尺度符号 P_{ϕ_1} 没有对称根。因此，通过前面的推导，注意 q_{ϕ_1} 是一个常数，表明 $q_{\phi_1}(z)=q_{\phi_1}(0)\neq 0$；所以，由公式(5.2.45)，如果$\phi^*=\phi_1$，$C(z)$是一个多项式，而且这就建立了在定理中的第二个叙述。最后，假定ϕ_1与ϕ_2都具有最小支撑。那么，根据 Φ 的定义和公式(5.2.13)，有

$$\operatorname{supp}\phi_1=\operatorname{supp}\phi_2=[0,N_{\phi_1}]$$

和

$$\phi_2(x)=\sum_{j=0}^{p}c_j\,\phi_1(x-j),\quad c_p\neq 0 \qquad (5.2.46)$$

假定 $p\geqslant 1$。于是，对于 $x\in[N_{\phi_1}+p-1,N_{\phi_1}+p]$，我们有

$$0=\phi_2(x)=\sum_{j=0}^{p}c_j\,\phi_1(x-j)=c_p\,\phi_1(x-p)$$

因为ϕ_1在$[N_{\phi_1}-1,N_{\phi_1}]$上是非平凡的，所以$\phi_1(\cdot-p)$在$[N_{\phi_1}+p-1,N_{\phi_1}+p]$上是非平凡的。因此，$c_p=0$，这是对公式(5.2.46)的一个约束，而这是指

$$\phi_2(x)=c_0\,\phi_1(x)$$

$c_0=1$ 是$\phi_2(0)=\phi_1(0)=1$ 的一个推论。 ●

我们用下述例子结束本节。

例子 5.13 对于任何正整数 m，m 阶基数 B-样条 N_m 是一个尺度函数，这个尺度函数生成像 4.1 节定义的 $L^2(\mathbb{R})$ 的 MRA$\{V_j^m: j\in\mathbb{Z}\}$。$N_m$ 的两尺度关系用公式(4.3.4)给出，并且 N_m 的 Riesz 界是 $A=A_m$ 与 $B=1$，其中 A_m 用公式(4.2.21)定义。令 Φ_m 表示所有生成相同 MRA$\{V_j^m\}$的紧支撑函数$\phi\in V_0^m$的函数类。由于

N_m 的两尺度符号 P_{N_m} 是 $(1+z)^m/2^m$，它不具有对称零点，所以 N_m 是在 Φ_m 中具有最小支撑的唯一函数。

我们不打算进行任何细节方面的讨论，但注意到 N_m 只是 Φ_m 中的一个函数，尽管一般来说，Φ 的势可以是无限的。

5.3 $L^2(\mathbb{R})$的直接和分解

在上节中，只考虑具有有限两尺度序列的尺度函数。为研究更一般的理论，将允许两尺度序列属于 l^1（见在 5.1 节中的假设 (A3)），因此相应的两尺度符号属于所谓的"Wiener 类"。

定义 5.14 *一个 Laurent 级数说是属于 Wiener 类 $\mathscr{W}$ 如果它的系数序列属于 l^1。*

因为两个 l^1 序列的离散卷积还是在 l^1 中的一个序列，很明显，$\mathscr{W}$ 是一个"代数"。正如由 N. Wiener 的著名定理中看到的那样，实际情况是 $\mathscr{W}$ 甚至优于一个代数。

定理 5.15 *令 $f\in\mathscr{W}$ 并且对于在单位圆 $|z|=1$ 上的所有 z，假定 $f(z)\neq 0$，那么还有 $\frac{1}{f}\in\mathscr{W}$。*

不幸的是，这个定理的证明超出了本书的范围。对于不愿意接受这个定理的读者，研究在 $|z|=1$ 上没有极点的有理函数的 Laurent 级数子类只有小的牺牲，因为 Laurent 级数的特殊重要性是有限的或至少是具有指数衰减的。

令 ϕ 是一个尺度函数，它的两尺度符号

$$P_\phi(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k z^k \tag{5.3.1}$$

属于 $\mathscr{W}$。回忆 P_ϕ 在

$$\phi(x) = \sum_k p_k\,\phi(2x-k) \tag{5.3.2}$$

与 ϕ"生成"V_0 的意义上决定 $V_0\subset V_1$。现在考虑任何其它的 l^1 序列

$\{q_k\}$ 及其"符号"

$$Q(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k z^k \qquad (5.3.3)$$

（该式与两尺度符号 P 相匹配）。那么 Q 也属于 $\mathscr{W}$ 并且定义一个在 V_1 中的函数

$$\psi(x) := \sum_k q_k \phi(2x - k) \qquad (5.3.4)$$

这个函数 ψ 像 ϕ 生成 V_0 相同的方式还生成一个闭子空间 W_0，即：

$$W_0 := \mathrm{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \langle \psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z} \rangle \qquad (5.3.5)$$

因此，类似于设

$$P := P_\phi \qquad (5.3.6)$$

符号 Q 在满足公式(5.3.4)与(5.3.5)的意义上决定关系 $W_0 \subset V_1$。

当然，V_1 的两个子空间之间的关系必定依赖于两个符号 P 与 Q 之间的关系。在小波的构造中，主要关心的是至少保证 V_0 与 W_0 在意义

$$V_0 \cap W_0 = \{0\} \quad \text{与} \quad V_1 = V_0 + W_0 \qquad (5.3.7)$$

上是 V_1 的互补子空间。像在公式(1.4.4)中一样，公式(5.3.7)中的两个性质一起称 V_1 是 V_0 与 W_0 的"直接和"，并且公式(5.3.7)的 V_1 使用如下记号代替

$$V_1 = V_0 \dot{+} W_0 \qquad (5.3.8)$$

在下面，将看到矩阵

$$M_{P,Q}(z) := \begin{bmatrix} P(z) & Q(z) \\ P(-z) & Q(-z) \end{bmatrix} \qquad (5.3.9)$$

在表征公式(5.3.8)中起决定性的作用。因此,必须考虑矩阵公式(5.3.9)的行列式

$$\Delta_{P,Q}(z) := \det M_{P,Q}(z) \tag{5.3.10}$$

因为 P 与 Q 属于 $\mathscr{W}$ 而 $\mathscr{W}$ 是一个代数,还有

$$\Delta_{P,Q} \in \mathscr{W}$$

另外,如果在 $|z|=1$ 上,$\Delta_{P,Q}(z)\neq 0$,那么根据定理 5.15,又有

$$\frac{1}{\Delta_{P,Q}} \in \mathscr{W}$$

所以,在 $|z|=1$ 上 $\Delta_{P,Q}\neq 0$ 的条件下,这两个函数

$$\begin{cases} G(z) := \dfrac{Q(-z)}{\Delta_{P,Q}(z)} \\ H(z) := \dfrac{-P(-z)}{\Delta_{P,Q}(z)} \end{cases} \tag{5.3.11}$$

都属于 Wiener 类 $\mathscr{W}$。考虑公式(5.3.11)中函数 G 与 H 的原因是,$M_{G,H}$ 的转置 $M^T_{G,H}$ 是 $M_{P,Q}$ 的逆,即:

$$\begin{cases} M_{P,Q}(z)M^T_{G,H}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ M^T_{G,H}(z)M_{P,Q}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad |z| = 1 \end{cases} \tag{5.3.12}$$

公式(5.3.12)中的第一个恒等式等价于恒等式对

$$\begin{cases} P(z)G(z) + Q(z)H(z) = 1 \\ P(z)G(-z) + Q(z)H(-z) = 0, \quad |z| = 1 \end{cases} \tag{5.3.13}$$

而公式(5.3.12)中的第二个恒等式等价于下述四个恒等式的集:

$$\begin{cases} P(z)G(z) + P(-z)G(-z) = 1 \\ P(z)H(z) + P(-z)H(-z) = 0 \\ G(z)Q(z) + G(-z)Q(-z) = 0 \\ Q(z)H(z) + Q(-z)H(-z) = 1, \ |z| = 1 \end{cases} \tag{5.3.14}$$

对于 $L^2(\mathbb{R})$ 分解，不需要公式(5.3.14)中的恒等式。然而，这个恒等式的集在下节对“对偶性”的讨论将起关键作用。

因为 $G, H \in \mathscr{W}$，我们可以写出

$$\begin{cases} G(z) = \dfrac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n z^n \\ H(z) = \dfrac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n z^n \end{cases} \tag{5.3.15}$$

其中 $\{g_n\}, \{h_n\} \in l^1$，无论何时在单位圆上 $\Delta_{P,Q}(z) \neq 0$，现在我们准备用公式表示下述分解结果。

定理 5.16 直接和分解公式(5.3.8)成立的必要与充分条件是在单位圆 $|z|=1$ 上(连续)函数 $\Delta_{P,Q}$ 不为零。而且，如果 $\Delta_{P,Q}(z) \neq 0$ 对于所有 $|z|=1$ 成立，那么像公式(5.3.4)中用 $Q(z)$ 控制的族 $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ 是 W_0 的一个 Riesz 基，并且对于所有 $x \in \mathbb{R}$ “分解关系”

$$\phi(2x - l) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \{g_{2k-l}\phi(x-k) + h_{2k-l}\psi(x-k)\}, \quad l \in \mathbb{Z} \tag{5.3.16}$$

成立。

单方向证明 我们只关心重要的方向。因此，下面假定对所有满足 $|z|=1$ 的 z 有 $\Delta_{P,Q}(z) \neq 0$。结果，考虑的所有序列属于 l^1 并且改变求和次序不会有危险。

注意，作为公式(5.3.13)的一个等价公式，我们有

$$\begin{cases} P(z)(G(z)+G(-z)) \\ \quad +Q(z)(H(z)+H(-z))=1 \\ P(z)(G(z)-G(-z)) \\ \quad +Q(z)(H(z)-H(-z))=1, \quad |z|=1 \end{cases} \tag{5.3.17}$$

考虑到公式(5.3.15)，它可以写成

$$\begin{cases} P(z)\sum_k g_{2k}z^{2k}+Q(z)\sum_k h_{2k}z^{2k}=1 \\ P(z)\sum_k g_{2k-1}z^{2k-1}+Q(z)\sum_k h_{2k-1}z^{2k-1}=1, \quad |z|=1 \end{cases} \tag{5.3.18}$$

因此，通过设 $z=e^{-i\omega/2}$ 并且用 $\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})$ 与 $z\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})$ 依次乘公式(5.3.18)中的两个恒等式，我们有

$$\begin{cases} \hat{\phi}(\frac{\omega}{2})=\sum_k(g_{2k}z^{2k}P(z)\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})+h_{2k}z^{2k}Q(z)\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})) \\ \hat{\phi}(\frac{\omega}{2})e^{-i\frac{\omega}{2}}=\sum_k(g_{2k-1}z^{2k}P(z)\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) \\ \qquad\qquad +h_{2k-1}z^{2k}Q(z)\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})) \end{cases}$$

这等价于

$$\begin{cases} \hat{\phi}(\frac{\omega}{2})=\sum_k(g_{2k}z^{2k}\hat{\phi}(\omega)+h_{2k}z^{2k}\hat{\psi}(\omega)) \\ \hat{\phi}(\frac{\omega}{2})e^{-i\frac{\omega}{2}}=\sum_k(g_{2k-1}z^{2k}\hat{\phi}(\omega)+h_{2k-1}z^{2k}\hat{\psi}(\omega)) \end{cases} \tag{5.3.19}$$

其中使用了公式(5.3.2)与(5.3.4)的 Fourier 变换公式。因此，取公式(5.3.19)两边的 Fourier 逆变换，我们得到

$$
\begin{cases}
2\,\phi(2x) = \sum_k (g_{2k}\,\phi(x-k) + h_{2k}\psi(x-k)) \\
2\,\phi(2x-1) = \sum_k (g_{2k-1}\,\phi(x-k) \\
\qquad\qquad + h_{2k-1}\psi(x-k))
\end{cases}
\tag{5.3.20}
$$

很明显，公式(5.3.20)等价于公式(5.3.16)。结果，由于$\{q_k\}$与$\{h_k\}$属于l^1，并且

$$
V_1 = \mathrm{clos}_{L^2(\mathbb{R})}\langle \phi(2\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\rangle
$$

现在我们证明了$V_1 \subset V_0 + W_0$，所以

$$
V_1 = V_0 + W_0
$$

为了证明这是一个直接和，考虑

$$
\sum_k a_k\,\phi(x-k) + \sum_k b_k\psi(x-k) = 0 \tag{5.3.21}
$$

其中$\{a_k\}$与$\{b_k\}$属于l^2。于是，应用公式(5.3.2)与(5.3.4)中的两尺度关系，我们得到

$$
\sum_l \Big(\sum_k a_k p_{l-2k} + \sum_k b_k q_{l-2k}\Big)\,\phi(2x-l) = 0
$$

因此，借助$\{\phi(2\cdot - l) : l \in \mathbb{Z}\}$是$V_1$的一个 Riesz 基这一事实

$$
\sum_k a_k p_{l-2k} - \sum_k b_k q_{l-2k} = 0, \quad l \in \mathbb{Z} \tag{5.3.22}
$$

现在，取公式(5.3.22)两边的符号(即“z 变换”)，我们有

$$A(z^2)P(z) + B(z^2)Q(z) = 0 \qquad (5.2.23)$$

其中 A 与 B 分别表示$\{a_k\}$与$\{b_k\}$的符号。所以，如果 z 可用 $-z$ 代替，那么公式(5.3.23)得出了具有两个未知量 $A(z^2)$与 $B(z^2)$的线性方程组：

$$\begin{cases} P(z)A(z^2) + Q(z)B(z^2) = 0 \\ P(-z)A(z^2) - Q(-z)B(z^2) = 0 \end{cases}$$

其中系数矩阵是 $M_{P,Q}(z)$，它对于所有在 $|z|=1$ 上的 z 是非奇异的。因此，$A(z^2)$与 $B(z^2)$必定是零，并且公式(5.3.21)中的 l^2 序列$\{a_k\}$与$\{b_k\}$是平凡的。这就证明了 $V_0 \cap W_0 = \{0\}$。

为了证明族$\{\psi(\cdot - k): k \in \mathbb{Z}\}$是 W_0 的一个 Riesz 基，必须依靠定理 3.24。特别是，因为$\{\phi(\cdot - k): k \in \mathbb{Z}\}$是 V_0 的一个 Riesz 基，有

$$0 < A \leqslant \sum_k |\phi(\omega + 2\pi k)|^2 \leqslant B < \infty, \quad \omega \in \mathbb{R} \qquad (5.3.24)$$

还有，由公式(5.3.4)的 Fourier 变换公式得到

$$\begin{aligned} &\sum_k |\hat{\psi}(\omega + 2\pi k)|^2 \\ &= \sum_k |Q(e^{-i(\frac{\omega}{2}+\pi k)})|^2 |\hat{\phi}(\frac{\omega}{2} + \pi k)|^2 \\ &= |Q(z)|^2 \sum_k |\hat{\phi}(\frac{\omega}{2} + 2\pi k)|^2 \\ &\quad + |Q(-z)|^2 \sum_k |\hat{\phi}(\frac{\omega}{2} + \pi + 2\pi k)|^2 \end{aligned}$$

其中 $z=e^{-i\omega/2}$，所以应用公式(5.3.24)得到

$$A\{|Q(z)|^2+|Q(-z)|^2\}\leqslant\sum_k|\hat{\psi}(\omega+2\pi k)|^2 \quad (5.3.25)$$
$$\leqslant B\{|Q(z)|^2+|Q(-z)|^2\}$$

因为 $Q\in\mathscr{W}$，它在 $|z|=1$ 上是连续的，而且有

$$B' := 2\max_{|z|=1}|Q(z)|<\infty \quad (5.3.26)$$

另一方面，由于

$$\Delta_{P,Q}(z)=\det\begin{bmatrix}P(z) & Q(z)\\ P(-z) & Q(-z)\end{bmatrix}\neq 0,\quad |z|=1$$

可以看到，在单位圆的同一 z 上，$Q(z)$ 与 $Q(-z)$ 不可能同时变为零，所以再用 Q 在 $|z|=1$ 上的连续性，有

$$A' := \min_{|z|=1}(|Q(z)|^2+|Q(-z)|^2)>0 \quad (5.3.27)$$

因此，由公式(5.3.25)，(5.3.26)与(5.3.27)得到

$$AA'\leqslant\sum_k|\hat{\psi}(\omega-2\pi k)|^2\leqslant BB',\quad \omega\in\mathbb{R} \quad (5.3.28)$$

或 $\{\psi(\cdot-k): k\in\mathbb{Z}\}$ 是 W_0 的一个 Riesz 基。 ●

现在我们必须暂停一下，并且通过定理 5.16 注释 $L^2(\mathbb{R})$ 的分解。

附注 5.17 令 $\Delta_{P,Q}(z)\neq 0$ 对于所有在单位圆上的 z 成立，并且定义

$$W_j := \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} < \psi(2^j \cdot - k) : k \in \mathbb{Z} >, j \in \mathbb{Z}$$
(5.3.29)

于是，考虑到 V_j 的定义，$j \in \mathbb{Z}$，和定理 5.16 中的论断 $V_1 = V_0 \dot{+} W_0$，有

$$V_{j+1} = V_j \dot{+} W_j, \quad j \in \mathbb{Z} \tag{5.3.30}$$

因此，因为 $\{V_j\}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个 MRA，由此得到族 $\{W_j\}$ 构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的一种直接和分解，即：

$$L^2(\mathbb{R}) = \cdots \dot{+} W_{-1} \dot{+} W_0 \dot{+} \cdots \tag{5.3.31}$$

而且，公式(5.3.16)中的分解关系得出用公式(1.6.9)描述的分解算法并有 $a_k = g_{-k}$ 与 $b_k = h_{-k}$，以及公式(5.3.2)与(5.3.4)中的一对两尺度关系得出用公式(1.6.10)描述的重构算法(关于这些分解与重构算法，这里和其它的细节推导将在下节给出。)。然而，由最普通的假设：$\Delta_{P,Q}(z) \neq 0$ 对所有 $|z| = 1$ 成立，不可能得到关于时间-频率分析的任何结论。

(i) 由公式(5.3.3)得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x - k)dx \tag{5.3.32}$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k \hat{\phi}(0) = Q(1)$$

像通常那样，令

$$\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$$

于是，定理 5.16 表明，对于每个 $j \in \mathbb{Z}$，族 $\{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ 是 W_j 的一

个 Riesz 基。然而，整个族$\{\psi_{j,k}: j,k\in\mathbb{Z}\}$不必是$L^2(\mathbb{R})$的一个 Riesz 基。事实上，像在第三章中证明的那样，对于生成$L^2(\mathbb{R})$的一个 Riesz 基的函数ψ，使$\hat{\psi}$是连续的，它在$(-\infty,\infty)$上的积分必定是零，所以由公式(5.3.32)，一个必要条件是

$$Q(1)=0 \tag{5.3.33}$$

(ii) 即使ψ就生成$L^2(\mathbb{R})$的一个 Riesz 基，ψ也可以不是一个小波（或更确切地说，不是一个$\mathscr{R}$-小波），因为仍然必须研究ψ的对偶$\tilde{\psi}$的存在性。（见定义 1.5 和公式(1.4.1)中没有对偶的一个$\mathscr{R}$-函数的例子。）回忆在任一级数表示

$$f(x)=\sum_{j,k}c_{j,k}\psi_{j,k}(x),\quad f\in L^2(\mathbb{R})$$

中，需要ψ的一个对偶$\tilde{\psi}$以便由系数$c_{j,k}$提取f的时间-频率信息（见 1.4 节和定理 3.27）。

5.4 小波和它们的对偶

我们继续讨论$L^2(\mathbb{R})$分解，并且扩展结果以保证分解是"小波分解"。正像在附注 5.17 中注意到的那样，这需要根据公式(5.3.4)的 Laurent 级数$Q\in\mathscr{W}$控制的函数ψ是具有某个对偶小波$\tilde{\psi}$的一个小波。特别是，Q必须满足公式(5.3.33)。回忆两尺度符号$P=P_\phi\in\mathscr{W}$还必须满足公式(5.1.12)与(5.1.13)中的条件。因此，P与Q必定满足条件

$$\begin{cases} P(1)=1 \quad 与 \quad P(-1)=0 \\ Q(1)=1 \end{cases} \tag{5.4.1}$$

令G与H是用公式(5.3.11)定义的 Laurent 级数。于是，有$G,H\in\mathscr{W}$，而且四个 Laurent 级数P,Q,G,H满足公式(5.3.13)中的恒等式。所以由这组恒等式与公式(5.4.1)得到G必定还满足条件

$$G^*(1)=1 \quad 与 \quad G^*(-1)=0 \tag{5.4.2}$$

其中使用记号

$$G^*(z):=\overline{G(z)}=\overline{G}\left(\frac{1}{z}\right), \quad |z|=1 \tag{5.4.3}$$

可简化即将出现的表示。正像公式(5.4.1)与(5.4.2)描述的 P 与 G^* 之间的相似之处认为

$$G^*(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{g}_{-n}z^n, \quad |z|=1 \tag{5.4.4}$$

(见公式(5.3.15))还能选作某个尺度函数的两尺度符号,这个尺度函数生成一个可能不同的 $L^2(\mathbb{R})$的 MRA。

这诱发了构造小波与它们的对偶的下述策略。由两个容许的两尺度符号 $P=P_\phi$ 与 $G^*=G_{\tilde{\phi}}^*$ 出发,使

$$\begin{cases}\hat{\phi}(\omega)=\prod_{k=1}^{\infty}P(e^{-i\omega/2^k})\\ \hat{\tilde{\phi}}(\omega)=\prod_{k=1}^{\infty}G^*(e^{-i\omega/2^k})\end{cases} \tag{5.4.5}$$

都属于 $L^2(\mathbb{R})$(见定义 5.4 与定理 5.5)。而且,假设,ϕ生成$L^2(\mathbb{R})$的一个 MRA $\{V_j\}$而$\tilde{\phi}$生成$L^2(\mathbb{R})$的一 MRA $\{\tilde{V}_j\}$。于是,由于定理 5.16,选择满足

$$\Delta_{P,Q}(z)\neq 0 \quad 与 \quad \Delta_{G,H}(z)\neq 0, |z|=1 \tag{5.4.6}$$

的任何两个任意的 Laurent 级数 Q 与 H 将导致两个完全不相关的$L^2(\mathbb{R})$的直接和分解。由于前节的讨论,使用公式(5.3.14)中的第一个恒等式使这两个分解之间连系起来。

定义 5.18 两尺度符号 $P=P_\phi$ 与 $G^*=G_\phi^*$ 称为是彼此对偶的，如果它们满足恒等式

$$P(z)G(z)+P(-z)G(-z)=1,\quad |z|=1 \tag{5.4.7}$$

（对于 G^* 与 G 之间的关系见公式(5.4.3)）。

因此，如果两个 Laurent 级数 Q 与 H 选取得使在 $|z|=1$ 上两个非奇异矩阵 $M_{P,Q}(z)$ 与 $M_{G,H}^T(z)$ 彼此是逆矩阵，也就是说

$$M_{P,Q}(z)M_{G,H}^T(z)=M_{G,H}^T(z)M_{P,Q}(z)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad |z|=1 \tag{5.4.8}$$

那么，根据公式(5.3.14)和这个恒等式之间的等价性（见公式(5.3.12)），有

$$\begin{cases}P(z)H(z)+P(-z)H(-z)=0\\ G(z)Q(z)+G(-z)Q(-z)=0\\ Q(z)H(z)+Q(-z)H(-z)=1,\quad |z|=1\end{cases} \tag{5.4.9}$$

当然，公式(5.4.8)还等价于

$$\begin{cases}P(z)G(z)+Q(z)H(z)=1\\ P(-z)G(z)+Q(-z)H(z)=0,\quad |z|=1\end{cases} \tag{5.4.10}$$

（见公式(5.3.13)）。关于这一点，有下述定理。

定理 5.19 令 P 和 G^* 是像在定义 5.18 中的对偶两尺度符号。那么，$\mathscr{W}$ 中的 Laurent 级数 Q 与 H 满足公式(5.4.8)如且仅如他们由类

$$\begin{cases}Q(z)=z^{-1}G(-z)K(z^2)\ 与\ H(z)=zP(-z)K^{-1}(z^2)\\ 其中\quad K\in\mathscr{W}，而在\ |z|=1\ 上\ K(z)\neq 0\end{cases} \tag{5.4.11}$$

选取。

证明 容易证明，来自公式(5.4.11)的每对 Q 和 H 满足公式(5.4.8)。为导出相反的结论，依靠公式(5.4.8)与(5.4.10)之间的等价性。所以，应用 Cramer 规则，我们可以用 P 与 Q 表示 G 与 H，即：

$$G(z)=\frac{Q(-z)}{\Delta_{P,Q}(z)} \text{ 与 } H(z)=\frac{-P(-z)}{\Delta_{P,Q}(z)}, \quad |z|=1 \qquad (5.4.12)$$

(见公式(5.3.11))，其中，对于 $|z|=1$，$\Delta_{P,Q}(z)=P(z)Q(-z)-P(-z)Q(z)\neq 0$。因为 $\Delta_{P,Q}(-z)=-\Delta_{P,Q}(z)$，可以定义

$$K(z^2):=z\Delta_{P,Q}(-z), \quad |z|=1 \qquad (5.4.13)$$

所以，根据定理 5.15 的 $K\in\mathscr{W}$ 和 $|z|=1$ 时，$K(z)\neq 0$，现在，公式(5.4.11)由公式(5.4.12)与(5.4.13)得到。 ●

注意，根据公式(5.4.2)与公式(5.4.9)中的第一个恒等式，这对 (G^*,H^*) 满足条件

$$\begin{cases} G^*(1)=1 \text{ 与 } G^*(-1)=0 \\ H^*(1)=0 \end{cases} \qquad (5.4.14)$$

这个和公式(5.4.1)中对于一对 (P,Q) 具有相同的条件组。另外，在我们的策略中，为了用公式(5.4.11)描述的类中的 Q 与 H 构造小波和对偶小波，两尺度符号 $P=P_\phi$ 和 $G^*=G^*_\phi$ 起同样的主导作用。因此，这两对 (P,Q) 与 (G^*,H^*) 是可交换的。这称为"对偶原理"，这将在本节后面用较长的篇幅讨论。

因此，重要的是更详细地研究两个容许的两尺度符号 P 与 G^*。按照定义 5.4，我们能够写出

$$\begin{cases} P(z)=\left(\frac{1+z}{2}\right)^N S(z) \\ G^*(z)=\left(\frac{1+z}{2}\right)^{\tilde{N}}\tilde{S}(z), \quad |z|=1 \end{cases} \qquad (5.4.15)$$

其中 N 与 $\widetilde{N}$ 是正整数，$S(1)=\widetilde{S}(1)=1$，并且 $S(e^{-i\omega})$ 与 $\widetilde{S}(e^{-i\omega})$ 的 $L^\infty(0,2\pi)$ 连续模分别是 $O(\eta^\alpha)$ 阶和 $O(\eta^{\tilde{\alpha}})$ 阶，其中 $0<\alpha,\tilde{\alpha}\leqslant 1$。另外，在下文中，要求公式(5.4.15)中的因子 S 与 $\widetilde{S}$ 满足

$$\begin{cases} \mathbf{B} := \max\limits_{|z|=1}|S(z)| < 2^{N-\frac{1}{2}} \\ \widetilde{\mathbf{B}} := \max\limits_{|z|=1}|\widetilde{S}(z)| < 2^{\widetilde{N}-\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{5.4.16}$$

并且使用标准记号 χ_A 作为集合 A 的特征函数。

引理 5.20 *令 P 与 G^* 是像公式(5.4.15)中满足公式(5.4.16)的容许的两尺度符号。于是*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\chi_{[-2^n\pi,2^n\pi]}(\omega)\prod_{k=1}^{n}P(e^{-i\omega/2^k})G(e^{-i\omega/2^k}) - \prod_{k=1}^{\infty}P(e^{-i\omega/2^k})G(e^{-i\omega/2^k})\right|d\omega = 0 \tag{5.4.17}$$

证明 因为某些需要的估计是十分类似于在定理 5.5 的证明中的那些估计，我们对它们不详细阐述。我们首先证明，对于某个 $\eta>0$

$$\left|\prod_{k=1}^{\infty}P(e^{-i\omega/2^k})G(e^{-i\omega/2^k})\right| \leqslant \frac{C}{(1+|\omega|)^{1+\eta}}, \quad \omega\in\mathbb{R} \tag{5.4.18}$$

这个估计是相当简单的。事实上，对于任何正整数 n_0 和所有具有 $2^{n_0}<|\omega|/\pi\leqslant 2^{n_0+1}$ 的 ω，由公式(5.4.16)中的第一个假设，对某个 $\eta_1>0$，有

$$\left|\prod_{k=1}^{n_0} S(e^{-i\omega/2^k})\right| \leqslant B^{n_0} \leqslant C_1(1+\frac{|\omega|}{\pi})^{\log_2 B}$$

$$\leqslant C_1'(1+|\omega|)^{\log_2 B} \leqslant C_1'(1+|\omega|)^{N-\frac{1}{2}-\eta_1}$$

另外，对于任何 $K>n_0$，根据容许性条件，有

$$\left|\prod_{k=n_0+1}^{K} S(e^{-i\omega/2^k})\right| = \prod_{k=n_0+1}^{K} \left|1+(S(e^{-i\omega/2^k})-1)\right|$$

$$\leqslant \prod_{k=n_0+1}^{K} \left|1+O(\frac{|\omega|^{\alpha}}{2^{k\alpha}})\right| \leqslant C_2$$

因此，我们有

$$\left|\prod_{k=1}^{\infty} S(e^{-i\omega/2^k})\right| \leqslant C_1 C_2 (1+|\omega|)^{N-\frac{1}{2}-\eta_1}$$

所以

$$\left|\prod_{k=1}^{\infty} P(e^{-i\omega/2^k})\right| \leqslant C\left|\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}\right|^N (1+|\omega|)^{N-\frac{1}{2}-\eta_1}$$

$$\leqslant C(1+|\omega|)^{-\frac{1}{2}-\eta_1}$$

因为通过使用 $\eta_2>0$，同样的估计可应用于 G，也就是说，我们用 $\eta=\eta_1+\eta_2$ 就得到公式(5.4.18)。

其次，我们导出存在 $C>0$ 与 $\eta>0$ 使对于任何充分大的正整数 n 和 $|\omega|\leqslant 2^n\pi$，对于某个 $\eta>0$ 我们有

$$\left|\prod_{k=1}^{n} P(e^{-i\omega/2^k}) G(e^{-i\omega/2^k})\right| \leqslant \frac{C}{(1+|\omega|)^{1+\eta}} \quad (5.4.19)$$

为得到公式(5.4.19)，我们继续概述上述得到的论证，对于 $|\omega|\leqslant 2^n\pi$，有

$$\left|\prod_{k=1}^{n}P(e^{-i\omega/2^k})\right|=\left|\frac{2\sin(\omega/2)}{2^{n+1}\sin(\omega/2^{n+1})}\right|^N\left|\prod_{k=1}^{n}S(e^{-i\omega/2^k})\right|$$

$$\leqslant C(1+|\omega|)^{-\frac{1}{2}-\eta_1}$$

其中使用了不等式 $\frac{2}{\pi}|\omega|\leqslant|\sin\omega|\leqslant|\omega|$，这个不等式对于 $|\omega|\leqslant\frac{\pi}{2}$ 成立。再次，同样的估计应用于 G。

现在我们着手建立公式(5.4.17)。首先注意到，根据公式(5.4.18)，函数

$$\prod_{k=1}^{\infty}P(e^{-i\omega/2^k})G(e^{-i\omega/2^k})$$

属于 $L^1(\mathbb{R})$。令 $\varepsilon>0$ 是任意给定的。选取 $M>0$ 使

$$\int_{|\omega|>M}(1+|\omega|)^{-1-2\eta}d\omega<\varepsilon$$

然后，把公式(5.4.17)中的积分分为两个积分的和。对于在 $|\omega|\leqslant M$ 范围内的积分，被积函数一致收敛于零；而对于在 $|\omega|>M$ 的积分，用两个积分的和界定它，一个可以用公式(5.4.18)估计，另一个可以用公式(5.4.19)估计。这就完成了引理的证明。 ●

回忆像公式(5.4.5)中两个容许的两尺度符号 P 与 G^* 产生两个尺度函数。虽然 ϕ 与 $\tilde{\phi}$ 可以生成 $L^2(\mathbb{R})$ 的两个不同的 MRA，但它们仍然能在下述意义上相关。

定义 5.21 *两个分别生成 $L^2(\mathbb{R})$ 的可能不同的 MRA 的 $\{V_j\}$ 与 $\{\tilde{V}_j\}$ 的尺度函数 ϕ 与 $\tilde{\phi}$ 被说成是"对偶尺度函数"，如果它们满足条件*

$$< \phi(\cdot - j), \tilde{\phi}(\cdot - k) >$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x - j) \overline{\tilde{\phi}(x - k)} dx = \delta_{j,k}, \quad (5.4.20)$$

$$j, k \in \mathbb{R}$$

下面，给出对偶尺度函数与互相对偶的容许的两尺度符号之间的关系。

定理 5.22 令 $P = P_{\phi}$ 与 $G^{*} = G_{\phi}^{*}$ 是像公式(5.4.15)中定义的两个容许的两尺度符号。另外，令ϕ与$\tilde{\phi}$是用公式(5.4.5)给出 Fourier 变换的相应的尺度函数。如果ϕ与$\tilde{\phi}$是像定义 5.21 中的对偶尺度函数，那么 P 与 G^{*} 在公式(5.4.7)意义上是互相对偶的。相反，如果 P 与 G^{*} 是互相对偶的并且满足公式(5.4.16)，那么ϕ与$\tilde{\phi}$是对偶尺度函数。

证明 令ϕ与$\tilde{\phi}$是对偶尺度函数。那么，对于每个 $n \in \mathbb{Z}$，有

$$\delta_{n,0} = < \phi, \tilde{\phi}(\cdot - n) >$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\omega) \overline{\hat{\tilde{\phi}}(\omega)} e^{in\omega} d\omega$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \hat{\phi}(\omega) \overline{\hat{\tilde{\phi}}(\omega)} e^{in\omega} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\omega + 2\pi k) \overline{\hat{\tilde{\phi}}(\omega + 2\pi k)} \right) e^{in\omega} d\omega$$

所以

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\omega+2\pi k)\overline{\hat{\tilde{\phi}}(\omega+2\pi k)} = 1 \quad \text{几乎处处}$$

(5.4.21)

因此，设 $z=e^{-i\omega/2}$ 并应用公式(5.4.21)，得到

$$\delta_{n,0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P(z)\overline{\overline{G^*(z)}}\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})\overline{\hat{\tilde{\phi}}(\frac{\omega}{2})}e^{in\omega}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\sum_{k}[P(z)G(z)\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}+2\pi k)\overline{\tilde{\phi}(\frac{\omega}{2}+2\pi k)}$$

$$+ P(-z)G(-z)\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}+\pi+2\pi k)$$

$$\times \overline{\hat{\tilde{\phi}}(\frac{\omega}{2}+\pi+2\pi k)}]e^{in\omega}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}[P(z)G(z)+P(-z)G(-z)]e^{in\omega}d\omega$$

于是，根据 P 与 G 在 $|z|=1$ 上的连续性，有

$$P(z)G(z)+P(-z)G(-z)=1, \quad |z|=1$$

即，P_ϕ 与 G_ϕ^* 是互相对偶的。

为了证明相反的结果，固定 $j\in\mathbb{Z}$，并且对于任一正整数 n 考虑

$$I_n := \frac{1}{2\pi}\int_{-2^n\pi}^{2^n\pi}(\prod_{k=1}^{n}P(e^{-i\omega/2^k})G(e^{-i\omega/2^k}))e^{ij\omega}d\omega$$

(5.4.22)

然后，用变量替换 $x=2^{-n}\omega$，有

$$I_n = 2^n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\prod_{k=1}^{n} P(e^{-i2^{n-k}x})G(e^{-i2^{n-k}x})\right)e^{ij2^n x}dx \tag{5.4.23}$$

$$= 2^n \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\prod_{k=1}^{n-1} P(e^{-i2^{n-k}x})G(e^{-i2^{n-k}x})\right)$$

$$\times \left[P(e^{-ix})G(e^{-ix}) + P(-e^{-ix})G(-e^{-ix})\right]e^{ij2^n x}dx$$

现在,通过引用 P 与 G^* 之间的对偶性并进行另外的变量替换 $y=2x$,可得到

$$I_n = 2^{n-1}\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left(\prod_{k=1}^{n-1} P(e^{-i2^{n-k-1}y})G(e^{-i2^{n-k-1}y})\right)e^{ij2^{n-1}y}dy$$

$$= 2^{n-1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\prod_{k=1}^{n-1} P(e^{-i2^{(n-1)-k}y})G(e^{-i2^{(n-1)-k}y})\right)e^{ij2^{n-1}y}dy \tag{5.4.24}$$

因此,比较公式(5.4.24)与(5.4.23),有 $I_n=I_{n-1}$。因为这个结论对于任何正整数 n 都是有效的,得到

$$I_n = I_{n-1} = \cdots = I_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ij\omega}d\omega = \delta_{j,0} \tag{5.4.25}$$

最后,应用引理 5.20,公式(5.4.25)的结果是

$$<\phi,\tilde{\phi}(\cdot - j)> = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\phi}(\omega)\overline{\hat{\tilde{\phi}}(\omega)}e^{ij\omega}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{\infty} P(e^{-i\omega/2^k})G(e^{-i\omega/2^k})\right)e^{ij\omega}d\omega$$

$$= \lim_{n\to\infty} I_n = I_0 = \delta_{j,0}$$

这就完成了定理的证明。 ●

现在，从公式(5.4.11)中的函数类，选择任何 Q 和 H。根据定理 5.19，矩阵 $M_{P,Q}$ 与 M_{G^*,H^*} 在 $|z|=1$ 上是可逆的，所以定理 5.16可应用。特别是，考虑函数

$$\begin{cases} \psi(x) := \sum_k q_k \phi(2x-k) \\ \tilde{\psi}(x) := \sum_k \overline{h}_{-k} \tilde{\phi}(2x-k) \end{cases} \tag{5.4.26}$$

其中

$$\begin{cases} Q(z) := \frac{1}{2}\sum_k q_k z^k \\ H^*(z) := \frac{1}{2}\sum_k \overline{h}_{-k} z^k \end{cases} \tag{5.4.27}$$

(对于 G^* 的类似式见公式(5.4.3))，并且设

$$\begin{cases} \psi_{j,k} := 2^{j/2}\psi(2^j \cdot - k) \\ \tilde{\psi}_{j,k} := 2^{j/2}\tilde{\psi}(2^j \cdot - k) \end{cases} \tag{5.4.28}$$

以及

$$\begin{cases} W_j := \operatorname{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \langle \psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z} \rangle \\ \tilde{W}_j := \operatorname{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \langle \tilde{\psi}_{j,k} : k \in \mathbb{Z} \rangle \end{cases} \tag{5.4.29}$$

有

$$
\begin{cases} V_{j+1} = V_j \dotplus W_j \\ \widetilde{V}_{j+1} = \widetilde{V}_j \dotplus \widetilde{W}_j, \quad j \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{5.4.30}
$$

这里，像通常那样，设

$$
\begin{cases} V_j := \operatorname{clos}_{L^2(\mathbb{R})} < \phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z} > \\ \widetilde{V}_j := \operatorname{clos}_{L^2(\mathbb{R})} < \widetilde{\phi}_{j,k} : k \in \mathbb{Z} > \end{cases} \tag{5.4.31}
$$

其中

$$
\begin{cases} \phi_{j,k} := 2^{j/2} \phi(2^j \cdot - k) \\ \widetilde{\phi}_{j,k} := 2^{j/2} \widetilde{\phi}(2^j \cdot - k) \end{cases} \tag{5.4.32}
$$

如果ϕ与$\widetilde{\phi}$分别是两尺度符号 $P=P_\phi$ 与 $G^*=G_\phi^*$ 的尺度函数。

下面将证明，如果容许的两尺度符号 P 与 G^* 在满足恒等式

$$
P(z)G(z) + P(-z)G(-z) = 1, \quad |z| = 1
$$

意义上是互相对偶的，那么不仅$\{\psi_{j,k}\}$与$\{\widetilde{\psi}_{j,k}\}$互相是对偶的，而且还可达到附加的正交性性质。

定理 5.23 令 $P=P_\phi$ 与 $G^*=G_\phi^*$ 是满足公式(5.4.16)的两个容许的两尺度符号并且是互相对偶的。于是，对于由类公式(5.4.11)选取的任何 $Q,H\in\mathscr{W}$，像公式(5.4.5)与(5.4.26)中定义的函数 $\phi,\widetilde{\phi},\psi$ 与 $\widetilde{\psi}$ 满足

$$
< \psi_{j,k}, \widetilde{\psi}_{l,m} > = \delta_{j,l}\delta_{k,m}, \quad j,k,l,m \in \mathbb{Z} \tag{5.4.33}
$$

与

$$\begin{cases} <\phi_{j,k},\tilde{\psi}_{j,l}> = 0 \\ <\tilde{\phi}_{j,k},\psi_{j,l}> = 0, \quad j,k,l \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{5.4.34}$$

即，对于所有 $j\in\mathbb{Z}$ 有 $V_j\perp\tilde{W}_j$，与 $\tilde{V}_j\perp W_j$。

证明 首先考虑公式(5.4.33)中 $j=l$ 的情况。在此情况下，用公式(5.4.9)中的第二个恒等式和公式(5.4.21)，再使用记号 $z=e^{-i\omega/2}$，有

$$<\psi_{j,k},\tilde{\psi}_{j,m}> = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\psi}(\omega)\,\overline{\hat{\tilde{\psi}}(\omega)}\,e^{-i(k-m)\omega}d\omega \tag{5.4.35}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Q(z)\,\overline{H^{*}(z)}\,\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})\,\overline{\hat{\tilde{\phi}}(\frac{\omega}{2})}e^{-i(k-m)\omega}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{l}\int_{0}^{2\pi}[Q(e^{-i(\frac{\omega}{2}+\pi l)})H(e^{i(\frac{\omega}{2}+\pi l)})$$

$$\times\,\phi(\frac{\omega}{2}+\pi l)\,\overline{\hat{\tilde{\phi}}}(\frac{\omega}{2}+\pi l)]e^{-i(k-m)\omega}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\sum_{l}[Q(z)H(z)\,\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}+2\pi l)\,\overline{\hat{\tilde{\phi}}}(\frac{\omega}{2}+\pi l)$$

$$+\,Q(-z)H(-z)\,\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}+\pi+2\pi l)$$

$$\times\,\overline{\hat{\tilde{\phi}}}(\frac{\omega}{2}+\pi+2\pi l)]e^{-i(k-m)\omega}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}[Q(z)H(z)+Q(-z)H(-z)]e^{-i(k-m)\omega}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}e^{-i(k-m)\omega}d\omega=\delta_{k,m}$$

对于一般情况来说，应用公式(5.4.9)中的前两个恒等式，上述给出的同样推导也得到公式(5.4.34)，所以

$$V_j \perp \widetilde{W}_j \quad 与 \quad \widetilde{V}_j \perp W_j, \quad j \in \mathbb{Z} \tag{5.4.36}$$

因此，如果 $j<l$，那么

$$\psi_{j,k} \in W_j \subset V_{j+1} \subset V_l$$

并且根据公式(5.4.36)中的第一个论断，有

$$<\psi_{j,k}, \widetilde{\psi}_{l,m}> = 0, \quad k,m \in \mathbb{Z}$$

对于 $j>l$，同样的结论能应用公式(5.4.36)中的第二个论断得出。这就完成了定理的证明。 ●

作为公式(5.4.33)中双正交性质的一个推论，族$\{\psi_{j,k}\}$和$\{\widetilde{\psi}_{j,k}\}$都是 l^2 线性无关的。因此，由于

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{R}) &= \cdots \dot{+} W_{-1} \dot{+} W_0 \dot{+} W_1 \dot{+} \cdots \\ &= \cdots \dot{+} \widetilde{W}_{-1} \dot{+} \widetilde{W}_0 \dot{+} \widetilde{W}_1 \dot{+} \cdots \end{aligned} \tag{5.4.37}$$

$\{\psi_{j,k}\}$与$\{\widetilde{\psi}_{j,k}\}$都是 $L^2(\mathbb{R})$的基底。事实上，在定理 5.23 的假设下，得到$\{\psi_{j,k}\}$与$\{\widetilde{\psi}_{j,k}\}$也都是 $L^2(\mathbb{R})$的框架。我们不打算给出这个事实的证明，因为似乎没有简单的推导是可用的。应用定理 3.20，现在能够断定，$\{\psi_{j,k}\}$与$\{\widetilde{\psi}_{j,k}\}$实际上是 $L^2(\mathbb{R})$的 Riesz 基，即，有下述结果。

定理 5.24 *在定理 5.23 的假设下，两个函数 $\psi \in W_0$ 与 $\widetilde{\psi} \in \widetilde{W}_0$ 是互相对偶的小波。*

因此，像在定理 3.27 中陈述的那样，每个函数 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 具有两个(唯一)小波的级数表示：

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{j,k} < f, \tilde{\psi}_{j,k} > \psi_{j,k}(x) \\ f(x) = \sum_{j,k} < f, \psi_{j,k} > \tilde{\psi}_{j,k}(x) \end{cases} \tag{5.4.38}$$

其中系数是 f 分别关于基小波 $\tilde{\psi}$ 和 ψ 的 IWT 值在时间-尺度位置

$$(b, a) = (\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j})$$

求得的值(见 1.4 节与定理 3.27)。

因此,很重要的是导出由 f 求出这些 IWT 的值以及由这些 IWT 值重构 f 的有效算法。结果是,两尺度序列 $\{\bar{g}_{-n}\}$ 与 $\{\bar{h}_{-n}\}$(它们的两尺度符号是用公式(5.4.4)和(5.4.27)给出的 $G^* = G^*_{\phi}$ 与 H^*)能够使用来得到 IWT 的值 $<f, \tilde{\psi}_{j,k}>$。这个计算方法称为“分解算法”,它是定理 5.16 中分解关系公式(5.3.16)的一个推论。另一方面,两尺度序列 $\{p_n\}$ 和 $\{q_n\}$(它们的两尺度符号是用公式(5.3.1)与(5.3.3)给出的 $P = P_{\phi}$ 与 Q)能够用来由其 IWT 值 $<f, \tilde{\psi}_{j,k}>$ 重构 f。这个计算方法称为“重构算法”,它是两尺度关系公式(5.3.2)与(5.3.4)的一个推论。如果我们希望使用 ψ 代替 $\tilde{\psi}$ 作为基小波,那么在分解算法中使用两尺度序列 $\{p_n\}$ 与 $\{q_n\}$,而在重构算法中使用两尺度序列 $\{\bar{g}_{-n}\}$ 与 $\{\bar{h}_{-n}\}$。

换句话说,为了分解和重构的目的,两对序列

$$(\{\bar{g}_{-n}\}, \{\bar{h}_{-n}\}) \quad 与 \quad (\{p_n\}, \{q_n\})$$

的作用可互相交换,如果 IWT 的信息

$$\{(W_{\tilde{\psi}} f)(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j}) : j, k \in \mathbb{Z}\} \tag{5.4.39}$$

用 IWT 的信息

$$\{(W_{\tilde\psi}f)(\frac{k}{2^j},\frac{1}{2^j}):j,k\in\mathbb{Z}\}$$

代替。在小波分解-重构中，这称为"对偶原理"。因此，没有必要描述两种情形。

在下文中，我们只讨论把 $\tilde\psi$ 作为基小波使用的公式(5.4.39)中的 IWT。对于任一 $f\in L^2(\mathbb{R})$，令 f_N 是对一个固定的 $N\in\mathbb{Z}$ 的 f 在 V_N 上的某个射影。注意，这个射影不一定是 $L^2(\mathbb{R})$ 的正交射影。我们可以把 V_N 看作"抽样空间"而把 f_N 看作 f 在 V_N 上的"数据"(或测量值)。因为

$$\begin{aligned} V_N &= W_{N-1}\dotplus V_{N-1}=\cdots \\ &= W_{N-1}\dotplus\cdots\dotplus W_{N-M}\dotplus V_{N-M} \end{aligned} \tag{5.4.40}$$

对于任何正整数 M，f_N 具有唯一分解

$$\begin{aligned} f_N(x) &= g_{N-1}(x)+g_{N-2}(x) \\ &\quad+\cdots+g_{N-M}(x)+f_{N-M}(x) \end{aligned} \tag{5.4.41}$$

其中

$$\begin{cases} g_j(x)\in W_j, & j=N-M,\cdots,N-1 \\ f_{N-M}(x)\in V_{N-M} \end{cases} \tag{5.4.42}$$

我们写出

$$\begin{cases} f_j(x)=\sum_k c_k^j\,\phi(2^jx-k)\in V_j \\ \text{而有 } c^j:=\{c_k^j\},k\in\mathbb{Z} \end{cases} \tag{5.4.43}$$

和

$$\begin{cases} g_j(x) = \sum_k d_k^j \psi(2^j x - k) \\ \text{而有 } \mathbf{d}^j := \{d_k^j\}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{5.4.44}$$

于是公式(5.4.41)中的分解唯一地用公式(5.4.43)和(5.4.44)中的序列 $\mathbf{c}^j$ 与 $\mathbf{d}^j$ 确定。重要的是要注意

$$d_k^j = (W_{\tilde{\psi}} f_N)\left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j}\right), \quad j, k \in \mathbb{Z} \tag{5.4.45}$$

是使用 $\tilde{\psi}$ 作为基小波的 f_N 的 IWT 的值。注意，公式(5.4.41)中的分解是数据相关的。在下面讨论的小波分解与重构方法中，将分别使用 $f_j(x)$ 与 $g_j(x)$ 的"数字表示" $\mathbf{c}^j, \mathbf{d}^j$。

为了简化讨论（和避免任何可能的混淆），引入记号

$$\begin{cases} a_n := \frac{1}{2} g_{-n} \\ b_n := \frac{1}{2} h_{-n} \end{cases} \tag{5.4.46}$$

其中 $\{\bar{g}_{-n}\}$ 与 $\{\bar{h}_{-n}\}$ 分别是相应于两尺度符号 $G^* = G_\phi^*$ 与 H^* 的两尺度序列（见公式(5.4.4)与(5.4.27)）。因此，定理 5.16 中的分解关系公式(5.3.16)现在变成

$$\phi(2x - l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{a_{l-2k} \phi(x - k) + b_{l-2k} \psi(x - k)\}, \quad l \in \mathbb{Z} \tag{5.4.47}$$

我们现在推导第一章公式(1.6.9)和(1.6.10)中陈述的分解和重构算法。

(i) **分解算法**

$$\begin{cases} c_k^{j-1} = \sum_l a_{l-2k} c_l^j \\ d_k^{j-1} = \sum_l b_{l-2k} c_l^j \end{cases} \tag{5.4.48}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \boldsymbol{d}^{N-1} & & \boldsymbol{d}^{N-2} & & & & \boldsymbol{d}^{N-M} \\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\ \boldsymbol{c}^N & \to & \boldsymbol{c}^{N-1} & \to & \boldsymbol{c}^{N-2} & \to & \cdots & \to & \boldsymbol{c}^{N-M} \end{array}$$

证明 应用分解关系公式(5.4.47),有

$$\begin{aligned} f_j(x) &= \sum_l c_l^j \phi(2^j x - l) \\ &= \sum_l c_l^j \Big[\sum_k \{a_{l-2k}\phi(2^{j-1}x - k) \\ &\quad + b_{l-2k}\psi(2^{j-1}x - k)\}\Big] \\ &= \sum_k \{\sum_l a_{l-2k} c_l^j\} \phi(2^{j-1}x - k) \\ &\quad + \sum_k \{\sum_l b_{l-2k} c_l^j\} \psi(2^{j-1}x - k) \end{aligned}$$

因此,由分解 $f_j(x) = f_{j-1}(x) + g_{j-1}(x)$,其中 $f_{j-1}(x)$ 与 $g_{j-1}(x)$ 是在公式(5.4.43)与(5.4.44)中用 $j-1$ 代替 j 给出,由此得到

$$\begin{aligned} &\sum_k \{\sum_l a_{l-2k} c_l^j - c_k^{j-1}\} \phi(2^{j-1}x - k) \\ &\qquad + \sum_k \{\sum_l b_{l-2k} c_l^j - d_k^{j-1}\} \psi(2^{j-1}x - k) = 0 \end{aligned}$$

所以,引用 $\{\phi_{j-1,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ 与 $\{\psi_{j-1,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ 的 l^2 线性无关性以及 $V_{j-1} \cap W_{j-1} = \{0\}$ 就得到公式(5.4.48)。 ●

(ii) **重构算法**

$$c_k^j = \sum_l \left[p_{k-2l} c_l^{j-1} + q_{k-2l} d_l^{j-1} \right] \tag{5.4.49}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
d^{N-M} & & d^{N-M+1} & & & & d^{N-1} & & \\
 & \searrow & & \searrow & & & & \searrow & \\
c^{N-M} & \rightarrow & c^{N-M+1} & \rightarrow & \cdots & & c^{N-1} & \rightarrow & c^N
\end{array}$$

证明 应用两尺度关系公式(5.3.2)与(5.3.4),有

$$\begin{aligned}
& f_{j-1}(x) + g_{j-1}(x) \\
& \quad = \sum_l \left[c_l^{j-1} \phi(2^{j-1}x - l) + d_l^{j-1} \psi(2^{j-1}x - l) \right] \\
& \quad = \sum_l \left[c_l^{j-1} \sum_k p_k \phi(2^j x - 2l - k) \right. \\
& \qquad \left. + d_l^{j-1} \sum_k q_k \phi(2^j x - 2l - k) \right] \\
& \quad = \sum_l \sum_k (c_l^{j-1} p_{k-2l} + d_l^{j-1} q_{k-2l}) \phi(2^j x - k) \\
& \quad = \sum_k \left\{ \sum_l \left[p_{k-2l} c_l^{j-1} + q_{k-2l} d_l^{j-1} \right] \right\} \phi(2^j x - k)
\end{aligned}$$

因为 $f_{j-1}(x) + g_{j-1}(x) = f_j(x)$,借助 $f_j(x)$的表示公式(5.4.43)和$\{\phi_{j,k}: k \in \mathbb{Z}\}$的 l^2 线性无关性我们得到公式(5.4.49)。 ●

注意,除了在分解中需要"向下抽样"和在重构中需要"向上抽样"外,分解与重构算法都是移动平均方法。为了向下抽样,我们只保留输出序列的每隔一项。更确切地说,在公式(5.4.48)中,只保留偶指标项,而且这个输出序列的(偶)指标被减半。为了向上抽样,在移动平均方案应用之前,在输入序列的每两个相邻项之间放

入一个零。更确切地说，在公式(5.4.49)中，输入序列$\{c_l^{j-1}\}$与$\{d_l^{j-1}\}$的指标用2乘，并且在新输入的序列中零用作具有奇指标的项(见第四章中算法4.7的公式(4.3.11))。

5.5 线性相位滤波

尺度函数和小波能够看作滤波函数。如果空间$L^2(\mathrm{IR})$表示所有具有有限能量的模拟信号的空间，并且$\{V_j\}$是$L^2(\mathrm{IR})$的一个MRA，那么抽一个模拟信号$f\in L^2(\mathrm{IR})$的样可用某个"抽样空间"V_N的逼近(这可以是插值也可以不是插值)来实现，其中N应该选得充分大以避免欠抽样。必须强调指出，即使应用一个数字抽样过程，已抽样的信号仍然是一个模拟信号，虽然f_N，像公式(5.4.43)描述的那样具有用一个尺度函数的级数表示，其中系数序列$c^N=\{c_i^N\}$可借助于数字抽样公式表示。例如，如果具有节点序列$2^{-N}\mathbb{Z}$的m阶基数样条空间V_N^m用作抽样空间V_N，那么应用一个有限移动平均过程就能够得到系数序列c^N，以便给出前章中分别在4.5节与4.6节中研究的f的拟插值或插值f_N。在任何情况下，f的模拟信号$f_N\in V_N$现在能够像公式(5.4.41)那样分解，其中对于每个$j=N-M,\cdots,N-1$，$g_j(x)$给出在第j个倍频程(或频带)中f_N的局部时间-频率信息。这个滤波器组方法的重要性是，已抽样信号f_N的细目被分类并存储在V_N的不同子空间W_j中，以便更好地分析。例如，在数据压缩中，在每个频带上简单使用阀值，我们通常可以获得本质的保存。所谓本质的保存，我们真正地是指，在每个子空间W_j中除去很小的幅度信息之后，更少的数据信息被存储或传送，而且重构算法在后边能够用来给出原始信号的一个好的逼近。当然，有许多更重要的类似性质的应用。然而，因为每个分量g_j已被改变，所以我们不再具有完全的重构，这样，必须特别注意可能的失真。重构的信号只不过是一个小波级数，它是线性滤波的一个结果。因此，如果滤波器具有线性相位，或者至少具有广义线性相位，失真就能够避免。

定义 5.25 令 $f\in L^2(\mathbb{R})$。那么称为 f 具有"线性相位"如果它的 Fourier 变换满足

$$\hat{f}(\omega)=\pm\ |\hat{f}(\omega)|e^{-ia\omega},\quad \text{几乎处处} \tag{5.5.1}$$

其中 a 是某个实常数而 $\pm$ 号与 ω 无关。另外，称 f 为具有"广义线性相位"如果

$$\hat{f}(\omega)=F(\omega)e^{-i(a\omega+b)},\quad \text{几乎处处} \tag{5.5.2}$$

其中 $F(\omega)$ 是一个实值函数而 a,b 是实常数。公式(5.5.1)和(5.5.2)中的 a 称为 $\hat{f}$ 的相位。

例子 5.26 m 阶基数 B-样条 N_m 的 Fourier 变换用

$$\hat{N}_m(\omega)=\left(\frac{\sin(\frac{\omega}{2})}{\frac{\omega}{2}}\right)^m e^{-\frac{m\omega}{2}}$$

给出，因此，N_m 具有线性相位，并且 $\hat{N}_m$ 的相位是 $m/2$。

定义 5.27 令 $\{a_n\}\in l^1$ 和 $A(e^{-i\omega})$ 是它的离散 Fourier 变换(或 Fourier 级数)。那么称 $\{a_n\}$ 为具有"线性相位"如果

$$A(e^{-i\omega})=\pm\ |A(e^{-i\omega})|e^{-in_0\omega},\quad \omega\in\mathbb{R} \tag{5.5.3}$$

其中 $n_0\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 而 $\pm$ 与 ω 无关。另外，称 $\{a_n\}$ 为具有"广义线性相位"，如果

$$A(e^{-i\omega})=F(\omega)e^{-i(n_0\omega+b)},\quad \omega\in\mathbb{R} \tag{5.5.4}$$

对于某个实值函数 $F(\omega)$，$n_0\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 及 $b\in\mathbb{R}$ 成立。公式(5.5.3)和(5.5.4)中的值 n_0 称为 $\{a_n\}$ 符号的相位。

下面首先给出具有广义线性相位的函数与序列的特征。

引理 5.28

(i) 一个函数 $f\in L^2(\mathbb{R})$ 在公式(5.5.2)意义上具有广义线性相位，其中 $a,b\in\mathbb{R}$，如且仅如 $e^{ib}f(x)$ 在

$$e^{ib}f(a+x)=\overline{e^{ib}f(a-x)},\quad x\in\mathbb{R} \tag{5.5.5}$$

意义上是关于 a“斜对称”的。

(ii) 一个序列 $\{a_n\}\in l^2$ 在公式(5.5.4)意义上具有广义线性相位，其中 $n_0\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 和 $b\in\mathbb{R}$，如且仅如 $\{e^{ib}a_n\}$ 在

$$e^{ib}a_n=\overline{e^{ib}a_{2n_0-n}},\quad n\in\mathbb{Z} \tag{5.5.6}$$

意义上关于 n_0 是“斜对称”的。

证明 (i)假定 $f\in L^2(\mathbb{R})$ 满足公式(5.5.2)。那么

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{-i(a\omega+b)}e^{ix\omega}d\omega$$

或等价地

$$e^{ib}f(a-x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{-ix\omega}d\omega \tag{5.5.7}$$

因为 $F(\omega)$ 是实的，所以论断公式(5.5.5)通过使公式(5.5.7)中表示式的复共轭与其本身相等就可得到。

相反，如果公式(5.5.5)满足，那么取其两边的 Fourier 变换产生

$$\begin{aligned}
e^{ib}\hat{f}(\omega)e^{ia\omega}&=e^{-ib}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(a-x)}e^{-i\omega x}dx\\
&=e^{-ib}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(a-x)e^{i\omega x}}dx\\
&=e^{ib}\overline{\hat{f}(\omega)e^{ia\omega}}
\end{aligned}$$

因此，这个量是实的，而公式(5.5.2)通过设这个实值函数是 $F(\omega)$ 就可得到。

(ii) 假定 $\{a_n\}\in l^1$ 满足公式(5.5.4)。那么就有

$$e^{i(n_0\omega+b)}A(e^{-i\omega}) = F(\omega) = \overline{F(\omega)} = e^{-i(n_0\omega+b)}\overline{A(e^{-i\omega})}$$

或等价地

$$e^{i2n_0\omega}e^{i2b}A(e^{-i\omega}) = \overline{e^{-ib}A(e^{-i\omega})} \qquad (5.5.8)$$

因此，论断公式(5.5.6)通过比较公式(5.5.8)中 $e^{in\omega}$ 的系数就可得到。

相反，如果公式(5.5.6)成立，那么就有公式(5.5.8)，因此

$$e^{i(n_0\omega+b)}A(e^{-i\omega}) = \overline{e^{i(n_0\omega+b)}A(e^{-i\omega})}$$

而我们定义这个实值表示式是 $F(\omega)$。这就得到公式(5.5.4)。●

附注 公式(5.5.5)和(5.5.6)中得到的“斜对称”概念不是很满意的，因为必须复共轭。然而，当 $f(x)$ 是实值时，很明显，为了(5.5.5)成立，e^{i2b} 必须也是实的，或者 $b=(1/2)\pi k$，其中 $k\in\mathbb{Z}$。即，公式(5.5.5)变成

(1°) $f(a+x)=f(a-x)$，　$x\in\mathbb{R}$　(对称性)　或

(2°) $f(a+x)=-f(a-x)$，　$x\in\mathbb{R}$　(反对称性)

当然，类似的结论对于实的 l^1 序列能够得到。

定理 5.29

(i) 一个实值函数 $f\in L^2(\mathbb{R})$ 具有广义线性相位如且仅如它(关于 $\hat{f}$ 的相位)是对称的或反对称的。

(ii) 一个实值序列 $\{a_n\}\in l^1$ 具有广义线性相位如且仅如它(关于 $\{a_n\}$ 的符号的相位)是对称的或反对称的。

线性相位的表示特性有点强。然而，由于前边的讨论(详细地见附注)，现在只考虑实值的函数与序列。还有，因为一个两尺度序列的相位特性直接影响相应尺度函数的特性，我们给出线性相位

序列的下述特征。

引理 5.30 一个具有符号 $A(e^{-i\omega})$ 的实值 l^1 序列 $\{a_n\}$ 有线性相位如且仅如存在某个 $n_0\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$，使 $A(e^{-i\omega})e^{in_0\omega}$ 是实值的，偶的，且不变号。

这个结果的证明是容易的。然而，如果序列是有限的，那么可再说一点。

引理 5.31 一个具有支撑 $[0,N]$ 的实值有限序列 $\{a_n\}$ 有线性相位如且仅如下述叙述成立：

(i) $a_{N-n}=a_n$，$n\in\mathbb{Z}$

(ii) 符号

$$A(z)=\sum_{n=0}^{N}a_nz^n$$

在单位圆上只有偶数阶零点。

证明 根据引理 5.30，实值有限序列 $\{a_n\}$，$n=0,\cdots,N$，有线性相位如且仅如存在某个 $n_0\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$，使函数

$$F(\omega):=A(e^{-i\omega})e^{in_0\omega}$$

是实值的，偶的，且不变号。另一方面，显然，$F(\omega)=F(-\omega)$ 等价于

$$\sum_{n=0}^{N}a_ne^{in\omega}=A(e^{i\omega})=e^{i2n_0\omega}A(e^{-i\omega})$$

$$=\sum_{n=0}^{N}a_ne^{i(2n_0-n)\omega}=\sum_{n=2n_0-N}^{2n_0}a_{2n_0-n}e^{in\omega}$$

而这个公式也等价于 $n_0=\frac{1}{2}N$ 和 $a_{N-n}=a_n$，对于所有 $n\in\mathbb{Z}$。当然，实值函数 $F(\omega)$ 不变号如且仅如它的实零点(如果有的话)是偶阶的；这又等价于叙述：$A(z)$ 在单位圆上只有偶阶零点。 ●

现在回到研究尺度函数的相位特性。

定理 5.32 令ϕ是一个具有两尺度序列$\{p_k\}\in l^1$的尺度函数，还有，令$P=P_\phi$表示ϕ的两尺度符号。那么

(i) ϕ具有广义线性相位如且仅如

$$\overline{P(\overline{z})} = z^{-2n_0}P(z), \quad |z| = 1 \qquad (5.5.9)$$

对于某个$n_0\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$成立；

(ii) ϕ具有线性相位如且仅如

$$P(e^{-i\omega}) = |P(e^{-i\omega})|e^{-in_0\omega} \qquad (5.5.10)$$

其中$n_0\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$。

证明 如果ϕ具有广义线性相位，那么，根据定义 5.25，对于某个实值函数$F(\omega)$和一些$a,b\in\mathbb{R}$，我们有

$$\hat{\phi}(\omega) = F(\omega)e^{-i(a\omega+b)}, \quad \text{几乎处处}$$

因此，$\overline{\hat{\phi}(\omega)}=F(\omega)e^{i(a\omega+b)}$，所以对于几乎所有$\omega\in\mathbb{R}$，

$$\overline{P(\overline{e^{-i\omega/2}})} = \frac{\overline{\hat{\phi}(\omega)}}{\overline{\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})}} = e^{ia\omega/2}\frac{F(\omega)}{F(\frac{\omega}{2})}$$

$$= e^{ia\omega}\frac{\hat{\phi}(\omega)}{\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})} = e^{ia\omega}P(e^{-i\omega/2})$$

这推出

$$n_0 := a \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$$

而且公式(5.5.9)成立。另外，如果ϕ有线性相位，那么用定义5.25，有$b=0$和$F(\omega)$不变号。因此，

$$P(e^{-i\omega/2})=\frac{\hat{\phi}(\omega)}{\hat{\phi}(\omega/2)}=e^{-ia\omega/2}\frac{F(\omega)}{F(\omega/2)}$$
$$=e^{-ia\omega/2}\left|\frac{F(\omega)}{F(\omega/2)}\right|$$
$$=e^{-in_0\omega/2}\left|P(e^{-i\omega/2})\right|$$

该式与公式(5.5.10)一致。

相反，如果公式(5.5.9)成立，那么就有

$$\hat{\phi}(\omega)=\prod_{k=1}^{\infty}P(e^{-i\omega/2^k}) \tag{5.5.11}$$
$$=\left\{\prod_{k=1}^{\infty}\overline{P(e^{-i\omega/2^k})}\right\}e^{-i2n_0\omega}$$
$$=\overline{\hat{\phi}(\omega)}e^{-i2n_0\omega}$$

因此，函数

$$F(\omega):=e^{in_0\omega}\hat{\phi}(\omega)$$

是实值的，并且因为

$$\hat{\phi}(\omega)=F(\omega)e^{-in_0\omega}$$

所以ϕ具有广义线性相位。如果假设公式(5.5.10)成立，那么就有

$$\hat{\phi}(\omega)=\prod_{k=1}^{\infty}P(e^{-i\omega/2^k})$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} P(e^{-i\omega/2^k}) \Big| e^{-in_0\omega}$$

$$= | \phi(\omega) | e^{-in_0\omega} \tag{5.5.12}$$

所以ϕ具有线性相位。 ●

附注 由引理 5.28(i)与上述论断可得出，一个尺度函数ϕ具有广义线性相位，必要和充分的是ϕ关于某个$n_0 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$，在

$$\phi(n_0 + x) = \overline{\phi(n_0 - x)}, \quad \text{几乎处处} \tag{5.5.13}$$

意义上是"斜对称"的。事实上，因为ϕ具有广义线性相位，公式(5.5.9)成立，因而有(5.5.11)，所以$\phi(\omega) = F(\omega)e^{-in_0\omega}$对于某个实值函数$F(\omega)$和某个$n_0 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$也成立。因此，公式(5.5.13)由引理5.28(i)得到。相反的结论是平凡的。 ●

如果两尺度序列$\{p_k\}$是实值的和有限的，那么应用定理 5.32 与引理 5.31，能够再说一点，如下述定理。

定理 5.33 *令ϕ是一个实值尺度函数，它的两尺度序列$\{p_k\}$是具有支撑$[0,N]$的一个有限实序列。那么*

(i) *ϕ具有广义线性相位如且仅如对于所有$n \in \mathbb{Z}$有$p_{N-n} = p_n$；*

(ii) *ϕ具有线性相位如且仅如对于所有n有$p_{N-n} = p_n$以及位于单位圆上的两尺度符号P_ϕ所有零点，如果有的话，具有偶重性。*

为研究一个小波的相位特性，人们必须懂得一点它的两尺度符号Q。例如，如果尺度函数ϕ具有广义线性相位，那么用两尺度关系$\hat{\psi}(\omega) = Q(e^{-i\omega/2})\hat{\phi}(\omega)$和定义 5.25 与 5.27 可得到，$\psi$也有广义线性相位，只要序列$\{q_k\}$具有广义线性相位，并且类似的结果对于小波的线性相位特性也能作出。当然，像在ϕ的研究中那样，通过更仔细的分析才能说得更清楚点。

例子 5.34　考虑一阶基数 B-样条 N_1 和它相应的 Haar 小波 $\psi_1(x)=\psi_H(x):=N_1(2x)-N_1(2x-1)$（见公式(1.5.7)，(1.1.16)和例子 3.2）。由例子 5.26，可看到 N_1 具有线性相位。因为 ψ_1 的两尺度符号 Q 是

$$Q(z)=\frac{1}{2}(1-z)=(\sin\frac{\omega}{4})e^{-i(\frac{1}{4}\omega-\frac{\pi}{2})} \tag{5.5.14}$$

其中 $z=e^{-i\omega/2}$，还可看到

$$\hat{\psi}_1(\omega)=Q(z)\hat{N}_1(\frac{\omega}{2})=\frac{(\sin\frac{\omega}{4})^2}{\frac{\omega}{4}}e^{-i(\frac{1}{2}\omega-\frac{\pi}{2})} \tag{5.5.15}$$

只有广义线性相位，但是不具有线性相位。

注意，Haar 小波 $\psi_1=\psi_H$ 是一个紧支撑正交小波（见公式(1.1.16)）。由下述结果，可以断定，ψ_1 是具有紧支撑的唯一的正交小波，使它的相应尺度函数具有广义线性相位。（一个正交小波 ψ 与它的相应正交尺度函数 ϕ 之间的关系将在下节以及第七章中讨论。）

定理 5.35　令 ϕ 是用像公式(5.2.2)中有限两尺度关系

$$\phi(x)=\sum_{k=0}^{N}p_k\phi(2x-k),\quad p_0,p_N\neq 0 \tag{5.5.16}$$

控制的一个尺度函数，而有 $N=N_\phi$ 与 $p_k=p_k^\phi$。设 $\{\phi(\cdot-k):k\in\mathbb{Z}\}$ 是构成一个单位划分的规范正交族，并且对某个 $a\in\mathbb{R}$，ϕ 在

$$\phi(a+x)=\overline{\phi(a-x)},\quad x\in\mathbb{R} \tag{5.5.17}$$

意义上是斜对称的(见在引理 5.28 中公式(5.5.5))。那么ϕ必定是一阶基数 B-样条。

证明 照例,令

$$P(z)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}p_kz^k$$

和 $z=e^{-i\omega/2}$。于是公式(5.5.16)等价于

$$\hat{\phi}(\omega)=P(z)\,\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}),\quad \omega\in\mathbb{R}\tag{5.5.18}$$

另一方面,论断公式(5.5.17)等价于

$$\hat{\phi}(\omega)e^{ia\omega}=\overline{\hat{\phi}(\omega)e^{ia\omega}},\quad \omega\in\mathbb{R}\tag{5.5.19}$$

因此,由公式(5.5.18)与(5.5.19),有

$$P(z)=\frac{\hat{\phi}(\omega)}{\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})}=e^{-ia\omega}\frac{\overline{\hat{\phi}(\omega)}}{\overline{\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})}}=z^{2a}\,\overline{P(z)}$$

对于 $|z|=1$ 成立,因为 $P(z)$是一个具有非零首项系数与非零常数项的多项式,由此得到 $2a=N$,所以

$$\overline{P(z)}=z^{-N}P(z),\quad |z|=1\tag{5.5.20}$$

现在研究假设$\{\phi(\cdot-k):k\in\mathbb{Z}\}$是赋范正交族。根据定理 3.23,这个假设等价于

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\,\hat{\phi}(\omega+2\pi k)\,|^2=1\tag{5.5.21}$$

因此应用公式(5.5.18)得到

$$|P(z)|^2 + |P(-z)|^2 = 1, \quad |z| = 1 \quad (5.5.22)$$

这样，把公式(5.5.20)代入公式(5.5.22)中，就有

$$(P(z))^2 + (-1)^N(P(-z))^2 = z^N, \quad |z| = 1 \tag{5.5.23}$$

回忆5.2节，因为ϕ是一个函数，必须$N>0$。因此，由公式(5.5.23)和假设$p_N \neq 0$，看到N必定是一个奇整数。现在，设

$$\begin{cases} P_e(z) = \dfrac{1}{2}\sum_k p_{2k}z^k \\ P_o(z) = \dfrac{1}{2}\sum_k p_{2k+1}z^k \end{cases} \tag{5.5.24}$$

就能够写出

$$P(z) = P_e(z^2) + zP_o(z^2) \tag{5.5.25}$$

并且由恒等式(5.5.22)得到

$$|P_e(z)|^2 + |P_o(z)|^2 = \frac{1}{2}, \quad |z| = 1 \tag{5.5.26}$$

因此，应用公式(5.5.20)与(5.5.25)，得到

$$\begin{aligned} P_e(z^2) + zP_o(z^2) = P(z) &= z^N \overline{P(z)} \\ &= z^N \overline{[P_e(z^2) + zP_o(z^2)]} \\ &= z^N \overline{P_e(z^2)} + z^{N-1}\overline{P_o(z^2)}, \quad |z| = 1 \end{aligned}$$

因为N是奇数，使奇数部分及偶数部分分别相等，给出

$$\begin{cases} P_e(z^2) = z^{N-1}\overline{P_o(z^2)} \\ P_o(z^2) = z^{N-1}\overline{P_e(z^2)}, \quad |z| = 1 \end{cases}$$

所以

$$|P_e(z)|^2 = |P_o(z)|^2, \quad |z| = 1$$

将这个恒等式应用到公式(5.5.26)中得出

$$|P_e(z)|^2 = |P_o(z)|^2 = \frac{1}{4}, \quad |z| = 1 \quad (5.5.27)$$

这是不可能的，除非 P_e 与 P_o 是单项式，或

$$P(z) = \frac{1}{2}(p_o + p_N z^N), \quad N \text{ 是奇数}$$

(为检验这个断言，可以简单地把公式(5.5.27)展成多项式并且比较 z 的相同次幂的系数。)因为 $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ 是一个单位划分，所以有 $P(1) = 1$ 与 $P(-1) = 0$(见公式(5.1.12)与(5.1.13))。所以

$$P(z) = \frac{1 + z^N}{2}$$

因此

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1 + e^{-i\omega N/2^k}}{2}\right) = \frac{1 - e^{-i\omega N}}{i\omega N}$$

(见例子 5.3)。因此，根据公式(4.2.9)，我们得到

$$\sum_k |\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2 = \frac{4\sin^2\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{N^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega + 2\pi k)^2}$$

$$= \frac{\sin^2(\omega \frac{N}{2})}{N^2 \sin^2(\frac{\omega}{2})} \tag{5.5.28}$$

现在，由公式(5.5.21)得到 $N=1$。即 $P_\phi(z)=P(z)=(1+z)/2$，或者ϕ是一阶基数 B-样条 N_1(见 5.2 节)。 ●

附注 虽然公式(5.5.17)中只假定ϕ是斜对称的，但已证明，它是实值的，因此ϕ实际上是对称的。定理 5.35 指出，生成一个单位划分和赋范正交族$\{\phi(\cdot-k): k\in \mathbb{Z}\}$的任一紧支撑尺度函数$\phi$不可能具有广义线性相位，否则它几乎处处等于对某个 k 的一个区间$[k,k+1)$的特征函数。

5.6 紧支撑小波

本节的目的是研究具有紧支撑小波的结构。已像在前节的讨论，在信号分析中需要线性相位滤波器的启发，我们特别感兴趣的是斜对称小波。(回忆 5.5 节，对于任一实值函数 f，对于某个 $b\in \mathbb{R}$，$e^{ib}f(x)$是斜对称的如且仅如 f 是对称的或反对称的。)遵循像在 5.4 节中研究的对于构造小波的策略，我们考虑一对容许的两尺度符号 $P=P_\phi$ 与 $G^*=G_{\tilde{\phi}}^*$，它们在

$$P(z)G(z) + P(-z)G(-z) = 1, \quad |z| = 1 \tag{5.6.1}$$

意义上是互相对偶的，其中 $G^*(z)=\overline{G(\bar{z})}$，$|z|=1$(见定义 5.18，公式(5.4.3)和(5.4.4))。于是，小波 ψ 和它的对偶 $\tilde{\psi}$ 在

$$\begin{cases} \hat{\psi}(\omega) = Q(e^{-i\omega/2})\,\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) \\ \hat{\tilde{\psi}}(\omega) = H^*(e^{-i\omega/2})\,\hat{\tilde{\phi}}(\frac{\omega}{2}) \end{cases} \tag{5.6.2}$$

意义上具有两尺度符号，其中 $H^*(z)=\overline{H(\bar{z})}$，$|z|=1$，且 Q 与 H 是任意的，但是必须由公式(5.4.11)中的类中选择，即：

$$\begin{cases} Q(z) = z^{-1}G(-z)K(z^2) \\ H(z) = zP(-z)K^{-1}(z^2), \quad |z| = 1 \end{cases} \tag{5.6.3}$$

其中 K 属于 Wiener 类 $\mathscr{W}$，而对于 $|z|=1$ 有 $K(z)\neq 0$。另外回忆分别用 $\phi,\psi,\tilde{\phi}$ 及 $\tilde{\psi}$ 生成的空间 $\{V_j\}$，$\{W_j\}$，$\{\tilde{V}_j\}$ 及 $\{\tilde{W}_j\}$ 满足

$$\begin{cases} \cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots \\ V_{j+1} = V_j \dotplus W_j, \quad j \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{5.6.4}$$

$$\begin{cases} \cdots \subset \tilde{V}_{-1} \subset \tilde{V}_0 \subset \tilde{V}_1 \subset \cdots \\ \tilde{V}_{j+1} = \tilde{V}_j \dotplus \tilde{W}_j, \quad j \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{5.6.5}$$

和

$$\begin{cases} V_j \perp \tilde{W}_j, \quad j \in \mathbb{Z} \\ \tilde{V}_j \perp W_j, \quad j \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{5.6.6}$$

另外，两对 $(\phi,\tilde{\phi})$ 与 $(\psi,\tilde{\psi})$ 在

$$\begin{cases} \langle \phi(\cdot - k), \tilde{\phi}(\cdot - m) \rangle = \delta_{k,m}, \quad k,m \in \mathbb{Z} \\ \langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{l,m} \rangle = \delta_{j,l}\delta_{k,m}, \quad j,k,l,m \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{5.6.7}$$

意义上是对偶对。细节问题已经在 5.4 节中讨论过了。

首先研究半正交小波的结构，特别是正交小波的结构(见定义 3.22)。由定理 3.25 可见，用任一半正交小波 ψ 和它的对偶 $\tilde{\psi}$ 生成空间 W_j 与 $\tilde{W}_j$，$j\in\mathbb{Z}$，是恒等的，即：$W_j=\tilde{W}_j$ 对于所有 $j\in\mathbb{Z}$ 成立。因此，由公式(5.1.4)，还有 $V_j=\tilde{V}_j$ 对于所有 $j\in\mathbb{Z}$ 成立，所以尺度函数 ϕ 和它的对偶 $\tilde{\phi}$ 生成同样的 MRA。事实上，回到定理5.22

的证明(见公式(5.4.21)),我们发现,ϕ的(唯一)对偶$\tilde{\phi}$用

$$\hat{\tilde{\phi}}(\omega)=\frac{\hat{\phi}(\omega)}{\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\hat{\phi}(\omega+2\pi k)|^2} \tag{5.6.8}$$

给出(对于对偶半正交小波,见公式(3.6.13))。现在,我们把注意力集中到具有有限两尺度序列$\{p_n\}$的尺度函数ϕ,即

$$\phi(x)=\sum_{n=0}^{N}p_n\phi(2x-n),\quad p_0,p_N\neq 0$$

其中 $p_n=p_n^\phi$ 与 $N=N_\phi$ 如在 5.2 节中研究的一样。由公式(5.2.24),(5.2.25)及(5.2.30),回忆关于ϕ的广义 Euler-Frobenius Laurent 多项式

$$E(z)=E_\phi(z):=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\{\int_{-\infty}^{\infty}\phi(k+y)\overline{\phi(y)}dy\}z^k$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}+2\pi k)|^2 \tag{5.6.9}$$

其中 $z=e^{-i\omega/2}$,在$|z|=1$上没有零点也没有极点。因此,由公式(5.6.8)得到

$$\hat{\tilde{\phi}}(\omega)=\frac{1}{E(z^2)}\hat{\phi}(\omega) \tag{5.6.10}$$

结果,紧支撑尺度函数ϕ的对偶$\tilde{\phi}$没有紧支撑,除非$E(z)$是一个正常数,虽然它是指数衰减的。(当然,关于ϕ的半正交小波ψ,仍然可以具有紧支撑。)首先,我们必须求得$\tilde{\phi}$的尺度符号$G^*=G_{\tilde{\phi}}^*$。这个很容易应用公式(5.6.10)和ϕ的两尺度关系做到如下:

$$\hat{\tilde{\phi}}(\omega) = \frac{1}{E(z^2)}\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{E(z^2)}P(z)\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})$$
$$= \frac{E(z)}{E(z^2)}P(z)\hat{\tilde{\phi}}(\frac{\omega}{2})$$

所以

$$G^*(z) = \frac{E(z)}{E(z^2)}P(z), \quad z = e^{-i\omega/2} \tag{5.6.11}$$

还容易证明，对于这个 $G^*(z)$，对偶关系公式(5.6.1)等价于对于广义 Euler-Frobenius Laurent 多项式的恒等式(5.2.31)。现在，用定理 5.19 与公式(5.6.11)，任一关于尺度函数ϕ的小波 ψ 的两尺度符号 Q 用

$$Q(z) = z^{-1}G(-1)K(z^2) \tag{5.6.12}$$
$$= z^{-1}\frac{E(-z)\overline{P(-z)}}{E(z^2)}K(z^2)$$

给出，其中 $K \in \mathscr{W}$ 而对于 $|z|=1$，$K(z) \neq 0$(见公式(5.6.3))。这样，我们在 ψ 的选择方面就有一些自由。特别是，具有最小支撑的小波 ψ 通过选择容许的 $K \in \mathscr{W}$(即，对于 $|z|=1$ 有 $K(z) \neq 0$)来得到，以便 Q 是一个最低次多项式。我们不打算在一般情形寻求进一步的结果，而只叙述由定理 5.11 与 5.12 关于最小支撑尺度函数的两尺度符号的结果对此研究是有用的。对于尺度函数基数 B-样条的详细研究将在下章的 6.2 节中给出。

因为 E 是一个在 $|z|=1$ 上既没有零点也没有极点的 Laurent 多项式，可以在公式(5.6.12)中选择 $K(z) = -zE(z)$，所以对于紧支撑半正交小波 ψ 和它的对偶 $\tilde{\psi}$ 的两尺度符号 Q H^* 分别用

$$\begin{cases} Q(z) = -zE(-z)\overline{P(-z)} \\ H(z) = -z^{-1}\dfrac{P(-z)}{E(z^2)} \end{cases} \tag{5.6.13}$$

给出(见公式(5.6.3)。K 的这种选取,而不是简单地取 $K=E$ 的原因是,这个规范化与 Haar 函数的公式化是一致的。)注意,如果 E 不是一个常数,那么对偶小波 $\tilde{\psi}$ 也就不具有紧支撑,虽然它是指数衰减的。在公式(5.6.13)中,Q 选取的一个优点是,它很容易确定小波 ψ 是否具有广义线性相位。事实上,因为 Laurent 多项式 $E(z)$的有限序列是斜对称的(见公式(5.2.26)或(5.6.9)),显然公式(5.6.13)中多项式 $Q(z)$的系数序列也是斜对称的,只要两尺度序列$\{p_k\}$具有这个特性。而且,由于公式(5.6.11)与(5.6.13),同样的结论对于 G^* 与 H^* 成立。特别是,对于实序列,应用定理5.32(i)与5.33,我们有下述结果。

定理 5.36 *令$\{p_k\}$是尺度函数ϕ的一个有限的、对称的、实值的两尺度序列。另外,令 ψ、$\tilde{\phi}$与 $\tilde{\psi}$ 分别是具有如公式(5.6.13)与(5.6.11)给出的两尺度符号 Q,G^* 与 H^* 的半正交小波,对偶尺度函数与对偶小波,那么,ϕ及其相应的半正交小波 ψ 具有紧支撑,$\tilde{\phi}$与 $\tilde{\psi}$ 是指数衰减的,并且所有的ϕ,ψ,$\tilde{\phi}$,$\tilde{\psi}$ 具有广义线性相位。*

下面,考虑关于紧支撑尺度函数ϕ的正交小波 ψ。通常的方法是,构造正交ϕ,在

$$\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$$

意义上是一个正交族。对于这样一个ϕ,由公式(5.6.9)得到,广义的 Euler-Frobenius 多项式 $E(z)$是常数 1。因此,用公式(5.6.13),有

$$Q(z) = -z\overline{P(-z)}, \quad |z| = 1$$

因此,如果ϕ的两尺度关系用

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{N} p_n \phi(2x - n), \quad p_0, p_N \neq 0$$

给出．那么，正交小波 ψ 的两尺度关系用

$$\psi(x) = \sum_{n=-N+1}^{1} (-1)^n \bar{p}_{1-n} \phi(2x - n) \quad (5.6.14)$$

给出。注意，因为对于ϕ与 ψ 的系数序列$\{p_n\}$与$\{(-1)^n p_{1-n}\}$具有类似的相位特性，由定理 5.35，预计紧支撑正交小波还是不具有广义相位特性。我们全部用公式表示定理 5.35 如下。

定理 5.37 *令 ψ 是像公式(5.6.14)给出的一个紧支撑正交小波，它的对应正交尺度函数ϕ产生一个单位划分。假定ϕ在公式(5.5.17)意义上是斜对称的，那么 ψ 必定是 Haar 函数 ψ_H。*

因此，对于具有广义线性相位的紧支撑连续小波函数 ψ，似乎只有两个可供选择的方法。首先，可以满足于半正交小波。这肯定是行得通的，只要认可对偶只是指数衰减的。下面，我们将完全放弃正交性并且寻找具有广义线性相位的紧支撑 ψ 与 $\tilde{\psi}$。按照在5.4节中用公式表示的策略，我们由彼此对偶的两个容许的两尺度（多项式）符号 $P=P_\phi$ 与 $G^*=G_\tilde{\psi}^*$ 出发。（因为 Q 与 G^* 也是 Laurent 多项式，选取一个单项式 K 就足够了）。

回忆定理 5.32，ϕ具有广义线性相位如且仅如它的两尺度符号 P 对于某个大的 m 满足

$$P(z) = z^m \overline{P(z)}, \quad |z| = 1 \quad (5.6.15)$$

（见公式(5.5.9)，而 $m=2n_0, n_0\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$）。为了能够构造$\phi$的一个紧支撑对偶$\tilde{\phi}$，还具有广义线性相位，我们必须提供$\tilde{\phi}$的一个容许两尺度多项式符号，对于 z 的某个整数次幂还满足公式(5.6.15)。在这个方面，有下述结果。

定理 5.38 令 $P=P_\phi$ 与 $G^*=G_\phi^*$ 是彼此对偶的容许两尺度 Laurent 多项式符号，使 P 满足公式(5.6.15)，那么

$$G_1(z):=\frac{1}{2}\{G(z)+z^{-m}G^*(z)\} \tag{5.6.16}$$

满足和 $G(z)$ 同样的对偶性关系：

$$P(z)G_1(z)+P(-z)G_1(-z)=1,\quad |z|=1 \tag{5.6.17}$$

并且

$$G_1(z)=z^{-m}\overline{G_1(z)},\quad |z|=1 \tag{5.6.18}$$

或等价地

$$G_1^*(z)=z^m\overline{G_1^*(z)},\quad |z|=1 \tag{5.6.19}$$

证明 很明显，G_1 满足公式(5.6.18)。事实上，对于 $|z|=1$，有

$$\begin{aligned}G_1^*(z)&=\overline{G_1(z)}\\&=\frac{1}{2}\{\overline{G(z)}+z^m\overline{G^*(z)}\}\\&=\frac{1}{2}\{G^*(z)+z^mG(z)\}=\frac{1}{2}\{G(z)+z^{-m}G^*(z)\}z^m\\&=z^mG_1(z)=z^m\overline{G_1^*(z)}\end{aligned}$$

为验证公式(5.6.17)，简单地使用公式(5.6.15)与(5.6.1)，并得到

$$\begin{aligned}&P(z)G_1(z)+P(-z)G_1(-z)\\&\quad=\frac{1}{2}\{P(z)[G(z)+z^{-m}G^*(z)]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ P(-z)[G(-z) + (-z)^{m}G^{*}(-z)]\} \\
&= \frac{1}{2}\{[P(z)G(z) + P(-z)G(-z)] \\
&\quad + [\overline{P(z)}G^{*}(z) + \overline{P(-z)}G^{*}(-z)]\} \\
&= \frac{1}{2}\{[P(z)G(z) + P(-z)G(-z)] \\
&\quad + [\overline{P(z)G(z) + P(-z)G(-z)}]\} \\
&= \frac{1}{2}(1 + 1) = 1, \qquad |z| = 1
\end{aligned}
$$

这就完成了定理的证明。●

下面，只考虑实值的有限两尺度序列。对于这样的序列，广义线性相位特性公式(5.6.15)变为

$$
P(e^{-i\omega}) = e^{-im\omega}P(e^{i\omega}), \quad \omega \in \mathbb{R} \tag{5.6.20}
$$

引理 5.39 令 P 是具有实系数的一个 Laurent 多项式，它对于某个 $m \in \mathbb{Z}$ 满足公式(5.6.20)，那么存在具有实系数(依赖于 m)的另外的多项式 P_1，使

$$
P(e^{-i\omega}) = \begin{cases} e^{-im\omega/2}P_1(\cos\omega), & \text{对偶 } m \\ e^{-im\omega/2}(\cos\dfrac{\omega}{2})P_1(\cos\omega), & \text{对奇 } m \end{cases} \tag{5.6.21}
$$

证明 由假定公式(5.6.20)，可看到 $e^{im\omega/2}P(e^{-i\omega})$ 是 ω 的一个偶函数。因此，如果 m 是一个偶整数，那么 $e^{im\omega/2}P(e^{-i\omega})$ 是一个 2π 周期的函数，所以是 $\cos\omega$ 的一个实的多项式。这对于偶数 m 就给出公式(5.6.21)。另一方面，如果 m 是一个奇整数，那么在公式(5.6.20)中选择 $\omega=\pi$，就有 $P(-1) = -P(-1)$，所以 $P(-1) = 0$。因此，对于某个具有实系数的多项式 P_0 可写出

$$P(z) = (\frac{1+z}{2})P_0(z) \qquad (5.6.22)$$

把公式(5.6.22)代到公式(5.6.20)中得到

$$P_0(e^{-i\omega}) = e^{-i(m-1)\omega}P_0(e^{i\omega})$$

现在,因为 $m-1$ 是偶数,对于某个具有实系数的多项式 P_1 有

$$P_0(e^{-i\omega}) = e^{-i(m-1)\omega/2}P_1(\cos\omega) \qquad (5.6.23)$$

因此,把公式(5.6.23)代到公式(5.6.22)中,对于奇数 m,就得到公式(5.6.21)。 ●

除了在引理 5.39 中的结果外,回忆一下,作为一个两尺度符号,P 可写作

$$P(z) = (\frac{1+z}{2})^l P_2(z) \qquad (5.6.24)$$

其中 P_2 是具有实系数的一个 Laurent 多项式,满足

$$P_2(1) = 1 \quad 与 \quad P_2(-1) \neq 0 \qquad (5.6.25)$$

并且 l 是某个正整数。

引理 5.40 令 P 是具有实系数的一个 Laurent 多项式,满足公式(5.6.20)与(5.6.24)～(5.6.25),那么$(m-l)$必定是一个偶整数,并且

$$P(e^{-i\omega}) = e^{-im\omega/2}(\cos\frac{\omega}{2})^l S(\cos\omega) \qquad (5.6.26)$$

其中 S 是具有实系数的多项式,满足

$$S(1) = 1 \quad 与 \quad S(-1) \neq 0 \qquad (5.6.27)$$

证明 由公式(5.6.24),有

$$P(e^{-i\omega}) = e^{-il\omega/2}(\cos\frac{\omega}{2})^l P_2(e^{-i\omega}) \qquad (5.6.28)$$

因此，用公式(5.6.20)，得到

$$P_2(e^{-i\omega}) = e^{-i(m-l)\omega}P_2(e^{i\omega}) \qquad (5.6.29)$$

首先证明，$(m-l)$是一个偶数。假定相反，$(m-l)$是奇数，那么，正如我们前边看到的那样，使用 $\omega=\pi$ 的公式(5.6.29)，$P_2(-1)=0$。这与公式(5.6.25)矛盾。现在，因为$(m-l)$是偶数，可以使用引理5.39 对于具有实数系数的某个多项式 S 写出

$$P_2(e^{-i\omega}) = e^{-i(m-l)\omega/2}S(\cos\omega) \qquad (5.6.30)$$

因此，论断公式(5.6.26)通过把公式(5.6.30)代到公式(5.6.28)中就建立了。另外，根据公式(5.6.25)，显然公式(5.6.30)中的多项式 S 满足公式(5.6.27)。 ●

由引理 5.40，可看到任何具有实系数与广义线性相位(即满足公式(5.6.20))的两尺度(Laurent)多项式符号具有公式(5.6.26)表示，而 S 是具有实系数的一个多项式，满足公式(5.6.27)。由定理 5.38 与引理 5.40，寻找形式为

$$G(e^{-i\omega}) = e^{i\tilde{m}\omega/2}(\cos\frac{\omega}{2})^{\tilde{l}}\tilde{S}(\cos\omega) \qquad (5.6.31)$$

的对偶符号 $G^*(z)=\overline{G(z)}$，$|z|=1$，其中 $\tilde{S}$ 是满足 $\tilde{S}(1)=1$ 的一个实多项式，而 $\tilde{l}$ 是某个正整数，使

$$N := (\tilde{l} + l)/2$$

也是一个正整数，应用公式(5.6.26)与(5.6.31)，公式(5.6.1)中的对偶恒等式变为

$$(\cos\frac{\omega}{2})^{2N}S(\cos\omega)\widetilde{S}(\cos\omega)$$

$$+(\sin\frac{\omega}{2})^{2N}S(-\cos\omega)\widetilde{S}(-\cos\omega)=1 \quad (5.6.32)$$

另外，设 $x=\sin^2(\omega/2)$，就有 $\cos\omega=1-2x$。因此，如果定义

$$R(x):=S(1-2x)\widetilde{S}(1-2x)$$

那么公式(5.6.32)变为

$$(1-x)^N R(x)+x^N R(1-x)=1 \quad (5.6.33)$$

所以，现在的问题是给出实多项式 $R(x)$ 的特征化。

根据 Euclidean 算法，存在两个多项式 A 与 B 使

$$x^N A(x)+(1-x)^N B(x)=1 \quad (5.6.34)$$

我们写出

$$A(x)=C(x)(1-x)^N+A_1(x)$$

其中 $\deg A_1\leqslant N-1$；并设

$$B_1(x)=B(x)+C(x)x^N$$

因为

$$x^N\{C(x)(1-x)^N+A_1(x)\}+(1-x)^N B(x)=1$$

有

$$x^N A_1(x)=1-(1-x)^N B_1(x)$$

这还推出 $\deg B_1\leqslant N-1$。即，存在多项式 A_1 与 B_1 使

$$\begin{cases}x^N A_1(x)+(1-x)^N B_1(x)=1 \\ \deg A_1\leqslant N-1 \quad 且 \quad \deg B_1\leqslant N-1\end{cases} \quad (5.6.35)$$

公式(5.6.35)中的多项式 $A_1(x)$ 与 $B_1(x)$ 实际上是唯一的。事实上,如果存在另外的解对$(\widetilde{A}_1,\widetilde{B}_1)$,那么差$(A-\widetilde{A}_1,B-\widetilde{B}_1)$满足

$$x^N(A_1(x)-\widetilde{A}_1(x))+(1-x)^N(B_1(x)-\widetilde{B}_1(x))=0$$

其中 $\deg(A_1-\widetilde{A}_1),\deg(B_1-\widetilde{B}_1)\leqslant N-1$,因此,$A_1-\widetilde{A}_1=0$ 和 $B_1-\widetilde{B}_1=0$,由于 x^N 与$(1-x)^N$是互质的。现在,通过交换公式(5.6.35)中 x 与$(1-x)$,A_1 与 B_1 的唯一性推出 $A_1(x)=B_1(1-x)$。即,的确存在唯一具有 $\deg R_0\leqslant N-1$ 的代数多项式 R_0 是公式(5.6.33)的解。为确定 R_0,我们用$(1-x)^{-N}$乘整个公式(5.6.33),并且按 x 的项展开,得到

$$\begin{aligned}R_0(x)&=(1-x)^{-N}\{1-x^NR_0(1-x)\}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{N+k-1}{k}x^k\{1-x^NR_0(1-x)\}\\&=\sum_{k=0}^{N-1}\binom{N+k-1}{k}x^k+\widetilde{R}_0(x)\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\widetilde{R}_0(x)=&\sum_{k=N}^{\infty}\binom{N+k-1}{k}x^k\\&-R_0(1-x)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{N+k-1}{k}x^{N+k}\end{aligned}$$

因为 $\widetilde{R}_0(x)$由等于或大于 x 的 N 次幂组成,而 $R_0(x)$和其它的有限和是次数$\leqslant N-1$ 的多项式,故有 $\widetilde{R}_0(x)\equiv 0$,或者

$$R_0(x)=\sum_{k=0}^{N-1}\binom{N+k-1}{k}x^k \tag{5.6.36}$$

这是公式(5.6.33)的一个"特解"。通解一定是 $R_0(x)$ 与一个能用 x^N 整除的项的和。我们称这项为 $x^N T(x)$。因为这个函数解这个"齐次方程"(在公式(5.6.33)中用 0 代替 1),由此得出 T 满足 $T(1-x)=-T(x)$。即,设

$$\begin{cases} T_0(y) := T(\frac{1-y}{2}) \\ y := 1-2x = \cos\omega \end{cases} \tag{5.6.37}$$

就有

$$R(\frac{1-y}{2}) = R_0(\frac{1-y}{2}) + (\frac{1-y}{2})^N T_0(y) \tag{5.6.38}$$

其中 $T_0(-y)=-T_0(y)$。现在,回到公式(5.6.32),就得出 $S(y)\widetilde{S}(y)=S(\cos\omega)\widetilde{S}(\cos\omega)$ 的通用公式表示,即:

$$\begin{cases} S(y)\widetilde{S}(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \begin{bmatrix} N+k-1 \\ k \end{bmatrix} (\frac{1-y}{2})^k \\ \qquad + (\frac{1-y}{2})^N T_0(y) \\ T_0(-y) = -T_0(y) \end{cases} \tag{5.6.39}$$

现在写出对于 l 阶基数 B-样条的一个(紧支撑)对偶的斜对称两尺度多项式符号 G_l^* 来结束本章。

例子 5.41 斜对称两尺度符号 G_l^* 是

$$P_l(z) = (\frac{1+z}{2})^l$$

的对偶,G_l^* 对于 $|z|=1$ 用 $G_{l,\tilde{l}}^*(z)=G_{l,\tilde{l}}(\bar{z})$ 给出,其中

$$G_{l,\tilde{l}}(e^{-i\omega}) := e^{il\omega/2}(\cos\frac{\omega}{2})^{\tilde{l}}\widetilde{S}(\cos\omega)$$

$$= e^{il\omega/2}(\cos\frac{\omega}{2})^{l}\{\sum_{k=0}^{N-1}\begin{pmatrix}N+k-1\\k\end{pmatrix}(\sin\frac{\omega}{2})^{2k}$$

$$+(\sin\frac{\omega}{2})^{2N}T^{l}(\sin^{2}\frac{\omega}{2})\}$$

而 $N := (l+\tilde{l})/2$。这应用 $S=1$ 与 $m=l$ 的公式(5.6.39)与(5.6.26)得到。●

第六章　基数样条小波

研究尺度函数和小波以及它们对偶的一个非常通用的结构已经在前章建立。在这个方法中，主要要素之一是多分辨分析的概念，这不仅在构造方案中是最主要的，而且对于小波分解与重构算法公式表示也是必须的。像在实时信号分析这样的应用中，例如，一个有限能量信号(即 $L^2(\mathbb{R})$ 中一个函数)，在它能够应用分解算法分离为小波分量之前，它必须映射到某个抽样空间 V_N 内，而 V_N 属于构成一个 MRA 的嵌套序列 $\{V_j\}$。就这点来说，一个任意 m 阶基数样条空间的序列 $\{V_j^m\}$，$j\in\mathbb{Z}$，是 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个很有吸引力的 MRA，而空间 $L^2(\mathbb{R})$ 在样条与有限元法中对于构造射影算子是合适的，(如果满足于实时最优阶逼近，那么在 4.5 与 4.6 节中研究的拟插值与插值实际上是可用的)。另外，基数样条的结构，虽然很简单，由在 4.2～4.4 节中所研究的许多需要的性质组成。这是从它们中唯一地选出作为任意函数如信号的(非参数)模型的一个基本的选择。

本章的目的是借助于基数 B 样条用公式表示小波并且研究这些“样条小波”的结构。特别着重于给出半正交样条小波，因为它们的显式表示不仅便于这些特殊性质的研究，而且还简化了软件与硬件的实现。

6.1 插值样条小波

迄今为止,我们很熟悉的小波,至少在显式表示中,是 Haar 小波 $\psi_1=\psi_H$。一方面,它的同伴尺度函数是一阶基数 B-样条 N_1,即:

$$\psi_H(x) = N_1(2x) - N_1(2x-1) \tag{6.1.1}$$

而另一方面,注意 ψ_H 在

$$\psi_H(x) = N'_2(2x) \tag{6.1.2}$$

意义上还与二阶基数 B-样条 N_2 的导数有关是有意义的。因此,要求推广对公式(6.1.2)的研究是很自然的。为回答这个问题,我们首先注意,二阶基数 B-样条 N_2 可看作是在 4.6 节中引入的一个基本基数样条。事实上,公式(4.6.2)-(4.6.3)中所定义的二阶基本基数样条函数 L_2 可用下式给出:

$$L_2(x) = N_2(x+1)$$

因此,论断公式(6.1.2)的一种等价的叙述是

$$\psi_H(x) = L'_2(2x-1) \tag{6.1.3}$$

如果遵循这个观点,那么可得到任意阶的样条小波,确切地说,令 $\{V_j^m\}$ 是像在 4.1 节中引入的用 m 阶基数 B-样条生成的 $L^2(\mathbb{R})$的 MRA,并且令$\{W_j^m\}$,$j\in\mathbb{Z}$,表示在

$$V_{j+1}^m = V_j^m \oplus W_j^m,\quad j\in\mathbb{Z} \tag{6.1.4}$$

意义上正交补(小波)空间的序列,其中应该想到,围绕正号的圆圈表示正交和(见公式(1.4.8)与(1.5.9))。下面,对于每个正整数 m,L_m 表示在公式(4.6.2)-(4.6.3)中引入的 m 阶基本基数样条函数。

定理 6.1 令 m 是任一正整数,并且定义

$$\psi_{I,m}(x) = L_{2m}^{(m)}(2x - 1) \qquad (6.1.5)$$

其中 L_{2m} 是 $2m$ 阶基本基数样条。那么，$\psi_{I,m}$ 在

$$W_j^m = \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} < 2^{j/2}\psi_{I,m}(2^j x - k) : k \in \mathbb{Z} >, \quad j \in \mathbb{Z} \qquad (6.1.6)$$

意义上生成(小波)空间 W_j^m，$j \in \mathbb{Z}$。

证明 首先证明 $\psi_{I,m}$ 属于 W_0^m。对于每个 $n \in \mathbb{Z}$，逐次地应用分部积分，并且注意，m 阶基数 B-样条 N_m 的 m 次导数是 δ 分布的整数平移的一种线性组合，就有

$$\begin{aligned}
&< N_m(\cdot - n), \psi_{m,I} > \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} N_m(x - n) L_{2m}^{(m)}(2x - 1) dx \\
&= \frac{(-1)^m}{2^m} \int_{-\infty}^{\infty} L_{2m}(2x - 1) N_m^{(m)}(x - n) dx \\
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2^m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} \int_{-\infty}^{\infty} L_{2m}(2x - 1) \\
&\quad \times \delta(x - n - k) dx \\
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2^m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} L_{2m}(2n + 2k - 1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

因为 $L_{2m}(l) = \delta_{l,0}$，$l \in \mathbb{Z}$，因此 $\psi_{I,m} \in W_0^m$。

其次，研究 $\psi_{I,m}$ 关于 $N_m(2x - k)$，$k \in \mathbb{Z}$，的两尺度关系。即，我们感兴趣的是研究对于

$$\psi_{I,m}(x) = L_{2m}^{(m)}(2x - 1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k N_m(2x - k) \qquad (6.1.7)$$

的 l^2 序列$\{q_k\}$。如果保持像公式(4.6.2)中同样的记号，我们可写出：

$$L_{2m}(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k^{(2m)}N_{2m}(x+m-k) \tag{6.1.8}$$

另一方面，反复应用在定理 4.3 中的基数 B-样条恒等式(vii)，由此得到

$$\begin{aligned}N_{2m}^{(m)}(x)&=(\Delta N_{2m-1}^{(m-1)})(x) \\ &=\cdots=(\Delta^m N_m)(x) \\ &=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}N_m(x-k)\end{aligned} \tag{6.1.9}$$

其中 Δ 表示公式(4.1.9)中引入的向后差分算子。因此，由公式(6.1.5)，(6.1.8)与(6.1.9)，可得到

$$\begin{aligned}\psi_{I,m}(x)&=L_{2m}^{(m)}(2x-1)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k^{(2m)}N_{2m}^{(m)}(2x-1+m-k) \\ &=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k^{(2m)}\sum_{l=0}^{m}(-1)^l\binom{m}{l}N_m(2x-1+m-k-l) \\ &=\sum_{n=-\infty}^{\infty}q_nN_m(2x-n)\end{aligned}$$

而

$$q_n:=\sum_{l=0}^{m}(-1)^l\binom{m}{l}c_{m+n-1-l}^{(2m)} \tag{6.1.10}$$

相应于公式(6.1.10)给出的公式(6.1.7)中的两尺度序列$\{q_k\}$的两尺度符号 Q 现在是

$$
Q(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{m} (-1)^l \binom{m}{l} c_{m+n-1-l}^{(2m)} \right) z^n \qquad (6.1.11)
$$

$$
= \frac{z^{-m+1}}{2} (1-z)^m \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(2m)} z^n
$$

其中由公式(6.1.8)和插值性质 $L_{2m}(l) = \delta_{l,0}$ 得到

$$
\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(2m)} z^n = \frac{1}{F_m(z)} \qquad (6.1.12)
$$

而

$$
F_m(z) := E_{N_m}(z) = \sum_{k=-m+1}^{m-1} N_{2m}(m+k) z^k
$$

$$
= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} N_m(k+x) N_m(x) dx \right\} z^k \qquad (6.1.13)
$$

是关于 m 阶基数 B-样条 N_m 的广义 Euler-Frobenius Laurent 多项式(见公式(4.2.14),(5.2.24)与(5.2.25))。在样条函数理论中,其中带有整系数的代数多项式是非常需要的,像公式(4.2.18)中的 $2m-1$ 阶 Euler-Frobenius 多项式用

$$
E_{2m-1}(z) := (2m-1)! z^{m-1} F_m(z)
$$

定义。因此,把公式(6.1.12)代入公式(6.1.11),我们就求得对于两尺度符号 Q 的公式,即:

$$
Q(z) = \frac{z^{-m+1}}{2} (1-z)^m \frac{1}{F_m(z)} \qquad (6.1.14)
$$

注意,因为定理 5.10 中的(i),所以 F_m 在单位圆上永不为零。

现在,既然 N_m 的两尺度符号用

$$P(z)=P_{N_m}(z)=\left(\frac{1+z}{2}\right)^m$$

给出(见公式(4.3.3)),于是能够计算公式(5.3.9)与(5.3.10)中定义的行列式如下:

$$\begin{aligned}\Delta_{P,Q}(z)&=\det\begin{bmatrix}P(z)&Q(z)\\P(-z)&Q(-z)\end{bmatrix}\qquad(6.1.15)\\&=\frac{(-z)^{-m+1}(1+z)^{2m}}{2^{m+1}F_m(-z)}-\frac{z^{-m+1}(1-z)^{2m}}{2^{m+1}F_m(z)}\\&=2^{m-1}\left[\frac{(P(z))^2}{\prod_m(-z)}-\frac{(P(-z))^2}{\prod_m(z)}\right]\\&=2^{m-1}\frac{z\prod_m(z^2)}{\prod_m(-z)\prod_m(z)}\\&=(-2)^{m-1}\frac{zF_m(z^2)}{F_m(-z)F_m(z)}\end{aligned}$$

其中应用了在定理 5.10 中的恒等式(5.2.32),而且 $N_\phi=m, k_\phi=m-1$, $\prod_\phi=\prod_m(z)=z^{m-1}F_m(z)$ 以及 $P'_\phi=P_\phi=P$。因为 F_m 在 $|z|=1$ 上永不为零,所以证明了

$$\Delta_{P,Q}(z)\neq 0,\quad |z|=1$$

因此,由定理 5.16 表明,的确完成了定理 6.1 的证明。 ●

考虑到前边的结果,我们研究具有节点序列 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 且在所有整数上为零的 $2m$ 阶基数样条的子空间

$$S_1^{2m,0}:=\{s\in S_1^{2m}:s(k)=0,k\in\mathbb{Z}\}\qquad(6.1.16)$$

很明显,函数

$$\Psi_{2m}(x) := \frac{1}{2^m}L_{2m}(2x-1) \tag{6.1.17}$$

属于 $V_1^{2m,0}$，并且所有它的整数平移也属于 $V_1^{2m,0}$。事实上，有下述结果。

定理 6.2 对于每个 m，族

$$\{\Psi_{2m}(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\} \tag{6.1.18}$$

是 $V_1^{2m,0}$ 的一个 Riesz 基。

证明 为了证明公式(6.1.18)中族的线性张成在 $V_1^{2m,0}$ 中是稠密的，我们令 $G \in V_1^{2m,0}$ 是任意选取的。然后，应用定理 4.3(ii)，对于所有 $l \in \mathbb{Z}$，我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty} G^{(m)}(x)N_m(x-l)dx \tag{6.1.19}$$
$$= \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}G(k+l) = 0$$

因此，很明显，$G^{(m)}$ 属于 V_1^m，公式(6.1.19)中推导证明 $G^{(m)}$ 正交于 V_1^m 的子空间 V_0^m，因此 $G^{(m)}$ 位于 W_1^m 中。根据定理 6.1，对于某个序列 $\{a_n\} \in l^2$，有

$$G^{(m)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \psi_{I,m}(x-n)$$

还有，注意到由 Ψ_{2m} 的定义公式(6.1.17)，有

$$\Psi_{2m}^{(m)}(x) = \psi_{I,m}(x) \tag{6.1.20}$$

所以

$$D^m\{G(x) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_k \Psi_{2m}(x-n)\} = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

其中 D^m 表示在公式(4.5.2)中引入的 m 阶微分算子。因为 $V_1^{2m,0}$ 只由在 $\mathbb{Z}$ 变为零的 $L^2(\mathbb{R})$中的函数组成,有

$$G(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \Psi_{2m}(x-k), \quad \{a_k\} \in l^2$$

为了证明公式(6.1.18)中基底是无条件的(或是一个 Riesz 基),我们很容易地注意到,因为

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}_{2m}(\omega) &= 2^{-m-1}\hat{L}_{2m}\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{-i\omega/2} \\ &= 2^{-m-1}e^{i(m-1)\omega/2}\left(\sum_k c_k^{(2m)}e^{-ik\omega/2}\right)\hat{N}_{2m}\left(\frac{\omega}{2}\right)\end{aligned}$$

由公式(4.2.16)与(6.1.12)得到

$$\begin{aligned}&\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\Psi}_{2m}(\omega + 2\pi k)|^2 \\ &= 2^{-2m-2}\left\{\frac{F_{2m}(z)}{(F_m(z))^2} + \frac{F_{2m}(-z)}{(F_m(-z))^2}\right\}\end{aligned} \tag{6.1.21}$$

其中 $z = e^{-i\omega/2}$ 和

$$\begin{aligned}F_{2m}(z) &= E_{N_{2m}}(z) \\ &= \frac{1}{(4m-1)!}z^{2m-1}E_{4m-1}(z)\end{aligned} \tag{6.1.22}$$

而 E_{4m-1} 是 $4m-1$ 阶(或 $4m-2$ 次)的 Euler-Frobenius 多项式。因此,应用定理 5.10(i),证明就可完成。 ●

作为定理 6.1 与 6.2 的一个推论，有下述结果。

定理 6.3 对于每个正整数 m，m 阶微分算子 D^m 把样条空间 $V_1^{2m,0}$ 一一地映上到小波空间 W_0^m。另外，$V_1^{2m,0}$ 的 Riesz 基 $\{\Psi_{2m}(\cdot-k): k\in\mathbb{Z}\}$ 通过关系式 $\Psi_{I,m}=D^m\Psi_{2m}$ 对应于 W_0^m 的 Riesz 基 $\{\psi_{I,m}(\cdot-k): k\in\mathbb{Z}\}$。

6.2 紧支撑样条小波

在公式(6.1.5)中引入的插值小波 $\psi_{I,m}$ 具有指数衰减，但是不是紧支撑的。然而，根据第五章中的研究(见 5.6 节)，我们已经知道，具有紧支撑的半正交小波总是存在的，只要相应的尺度函数ϕ的两尺度序列是有限的。实际上，像通常那样，如果 $P=P_\phi$ 表示ϕ的两尺度符号，那么认为ϕ的对偶$\tilde{\phi}$是和ϕ在相同的空间 V_0 中，$\tilde{\phi}$的两尺度符号 $G^*=G_{\tilde{\phi}}^*$，其中对于 $|z|=1$ 有 $G^*(z)=\overline{G(z)}$，用

$$G(z)=\frac{E_\phi(z)}{E_\phi(z^2)}\overline{P(z)},\quad |z|=1 \tag{6.2.1}$$

给出，其中 E_ϕ 是关于ϕ的广义 Euler-Frobenius Laurent 多项式(见公式(5.6.11))。从而，相应于ϕ的任一半正交小波 ψ 的两尺度符号 Q，对于任何 $K\in\mathscr{W}$ 而且在 $|z|=1$ 上 $K(z)\neq 0$，用

$$\begin{aligned}Q(z)&=z^{-1}G(-z)K(z^2) \qquad\qquad (6.2.2)\\&=z^{-1}E_\phi(-z)\overline{P(-z)}\frac{K(z^2)}{E_\phi(z^2)},\quad |z|=1\end{aligned}$$

给出(见公式(5.6.12))，所以通过简单地选择 $K(z)=-zE_\phi(z)$，对于一个紧支撑半正交小波 ψ 有两尺度多项式符号。在基数样条情况，由定理 5.19 得到，对于与 N_m 有关的所有可能的半正交小波类的两尺度符号的一般表示用公式(6.2.3)给出

$$
\begin{cases}
Q(z) = -z^{-2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^m E_{2m-1}(-z)\dfrac{K(z^2)}{E_{2m-1}(z^2)} \\
K \in \mathscr{W}, \quad \text{而 } K(z) \neq 0 \text{ 在 } |z| = 1 \text{ 上}
\end{cases}
\tag{6.2.3}
$$

其中 E_{2m-1} 是像公式(4.2.18)中定义的 $2m-1$ 阶(或 $2m-2$ 次)的 Euler－Frobenius 多项式。所以，为保证小波 ψ 具有紧支撑，公式(6.2.3)中的 Laurent 级数 K 必须选取得使得 Q 是一个多项式。现在，因为 E_{2m-1} 在 $|z|=1$ 上永不为零，降低多项式 $(1-z)^m E_{2m-1}(-z)$ 次数的唯一办法是使 $E_{2m-1}(z^2)$ 和 $E_{2m-1}(-z)$ 有共同的零点，然而同时，当公共因子被删去后，$E_{2m-1}(z^2)$ 剩余的因子必须仍然是 z^2 的幂的形式，因为它是通过公式(6.2.3)中的 $K(z^2)$ 约去的。这是不可能的，因为 $E_{2m-1}(z)$ 没有任何对称的零点，事实上，像我们将在6.4节中看到的那样，$E_{2m-1}(z)$ 的所有零点是负的(见公式(4.2.18)-(4.2.19))。因此，公式(6.2.3)中的 Q 是具有最小支撑的一个半正交基数样条小波 ψ 的两尺度符号，必要且充分的条件是

$$
K(z) = c_0 z^{n_0} E_{2m-1}(z) \tag{6.2.4}
$$

其中 c_0 是任一非零常数，而 n_0 是任一整数。换句话说，除乘一个非零常数和位移任一整数外，相应于 m 阶基数 B-样条 N_m 具有最小支撑的紧支撑半正交小波 ψ_m 是唯一的，并且用公式(6.2.5)给出

$$
\begin{cases}
\psi_m(x) := \sum_n q_n N_m(2x-n) \\
Q_m(z) = \frac{1}{2}\sum_n q_n z^n \\
\qquad := \left(\frac{1-z}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{2m-2} N_{2m}(k+1)(-z)^k
\end{cases}
\tag{6.2.5}
$$

其中我们选取公式(6.2.4)中的 $c_0=-[(2m-1)!]^{-1}$ 与 $n_0=1$，以便有 $q_0\neq 0$ 和对于 $n<0$ 有 $q_n=0$。由于类似于 N_m，ψ_m 还具有最小支撑这一事实，为了方便，称 ψ_m 为 m 阶"B-小波"。因为公式(6.2.5)中的 Q_m 是两个多项式符号的乘积，所以序列 $\{q_n\}$ 是这两个多项式系数序列的卷积，也就是说

$$q_n=\frac{(-1)^n}{2^{m-1}}\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}N_{2m}(n+1-l) \qquad (6.2.6)$$

$$n=0,\cdots,3m-2$$

下面总结这些研究结果。

定理 6.4 令 m 是任一正整数。还有，令 N_m 是 m 阶基数 B-样条而 ψ_m 是具有用公式(6.2.6)给出的系数，在公式(6.2.5)中定义的 B-小波。那么

$$\{\psi_m(\cdot-k):k\in\mathbb{Z}\} \qquad (6.2.7)$$

是 W_0 的一个 Riesz 基，而且，ψ_m 具有紧支撑并有

$$\mathrm{supp}\psi_m=[0,2m-1] \qquad (6.2.8)$$

ψ_m 是在下述意义上在 W_0 中具有最小支撑的"唯一"小波：如果 $\eta\in W_0$，像 ψ_m 生成一样生成 W_0 并且 η 的支撑是一个长度不超过 $2m-1$ 的区间，于是对于某个常数 $c_0\neq 0$ 与 $n_0\in\mathbb{Z}$ 有 $\eta(x)=c_0\psi_m(x-n_0)$。

现在回到 ψ_m 的对偶 $\tilde{\psi}_m$。根据公式(5.4.11)，$\tilde{\psi}$ 关于 $\tilde{\phi}$ 的两尺度符号 H^* 用 $H(z)=zP(-z)K^{-1}(z^2)$ 给出，其中，对于 $|z|=1$，$H(z)=\overline{H^*(z)}$。因此，考虑到 $\tilde{\phi}$ 与 ϕ 的对偶关系(见公式(5.6.10))，对于 $z=e^{-i\omega/2}$，我们有

$$\hat{\tilde{\psi}}_m(\omega)=H^*(z)\hat{\tilde{N}}_m(\frac{\omega}{2})=H^*(z)\frac{1}{E_{N_m}(z)}\hat{N}_m(\frac{\omega}{2})$$

因此，如果试着使对偶小波 $\tilde{\psi}_m$ 与在 6.1 中引入的插值小波 $\psi_{I,m}$ 联系起来，那么使用公式(6.1.14)中具有 $F_m(z)=E_{Nm}(z)$ 的两尺度符号 $Q(z)$（见公式(6.1.13)），我们有

$$\begin{aligned}\hat{\tilde{\psi}}(\omega)_m &= H^*(z)\left(\frac{2}{z^{-m+1}(1-z)^m}\right)\hat{\psi}_{I,m}(\omega) \\ &= \overline{(zP(-z)K^{-1}(z^2))}\frac{2z^{m-1}}{(1-z)^m}\hat{\psi}_{I,m}(\omega) \\ &= \frac{z^{-1}(1-\frac{1}{z})^m}{2^m K(z^2)}\frac{2z^{m-1}}{(1-z)^m}\hat{\psi}_{I,m}(\omega) \\ &= (-1)^m 2^{-m+1} z^{-2}\frac{1}{K(z^2)}\hat{\psi}_{I,m}(\omega)\end{aligned}$$

回顾公式(6.2.5)中 ψ_m 的规范化，在公式(6.2.4)中对于 $K(z)$ 选取 $c_0=-[(2m-1)!]^{-1}$ 与 $n_0=1$，就得出

$$\begin{aligned}\hat{\tilde{\psi}}_m(\omega) &= (-1)^{m+1}2^{-m+1}[(2m-1)!]z^{-4} \\ &\quad\times\frac{1}{E_{2m-1}(z^2)}\hat{\psi}_{I,m}(\omega) \qquad (6.2.9) \\ &= \frac{(-1)^{m+1}}{2^{m-1}}z^{-2(m+1)}\frac{1}{F_m(z^2)}\hat{\psi}_{I,m}(\omega)\end{aligned}$$

其中 F_m 是在基本基数样条 L_{2m} 的定义中 B-样条系数序列 $\{c_k^{(2m)}\}$ 的符号的倒数。因此，在(6.2.9)中，令 $z^2=e^{-\omega}$，我们有

$$\tilde{\psi}_m(x)=\frac{(-1)^{m+1}}{2^{m-1}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k^{(2m)}\psi_{I,m}(x+m+1-k) \qquad (6.2.10)$$

现在以相位特性的讨论和 B-小波 ψ_m 及其对偶 $\tilde{\psi}_m$ 的时间-频

率窗的研究来结束本节。首先注意，基数 B-样条 N_m 和基本基数样条 L_{2m} 对于任何 m 是对称的(见定理 4.3(ix))。因此，序列 $\{c_k^{(2m)}\}$ 也是对称的。所以，由 $\psi_{I,m}$ 的定义，我们得到 $\psi_{I,m}$ 对于偶数 m 一定是对称的，而对于奇数 m 则必定是反对称的，并且由公式(6.2.10)同样的论断对于 $\tilde{\psi}_m$ 成立。类似地，由公式(6.2.6)，因为很明显，序列 $\{q_n\}$ 对于偶阶 m 也是对称的，而对于奇阶 m 是反对称的，可以对于基数 B-小波 ψ_m 得出同样的结论。

定理 6.5 所有小波 $\psi_m, \tilde{\psi}_m$ 与 $\psi_{I,m}$ 对于偶数 m 是对称的，而对于奇数 m 是反对称的，因此，它们都具有广义线性相位。

B-小波 ψ_m 的图形是特别有意义的。对于 $m \geq 3$，对于 α, b, ω 的某些值，偶阶 ψ_m 的图形几乎完全与

$$\mathrm{Re}G_{b,\omega}^{\alpha}(t) = (\cos\omega t)g_{\alpha}(t-b) \tag{6.2.11}$$

相匹配，而奇阶 ψ_m 的图形几乎完全与

$$\mathrm{Im}G_{b,\omega}^{\alpha}(t) = (\sin\omega t)g_{\alpha}(t-b) \tag{6.2.12}$$

相匹配，其中 g_α 是具有参数 α 的 Gaussian 函数(见公式(3.1.10))。在图 6.2.1 与 6.2.2 中，我们分别画出 ψ_4 与 ψ_3 的图形。注意这些图形在图 3.1.1 与图 3.1.2 中相应的 Gaussian 函数图形之间的相似性。误差曲线如图 6.2.3 与 6.2.4 所示。

回忆第三章，当一个小波 ψ 用作在 IWT 中的一个基小波时，窗的面积用 $4\Delta_\psi\Delta_{\hat{\psi}}$ 给出，而且 $\Delta_\psi\Delta_{\hat{\psi}}$ 的值越小，小波应用于时间-频率局部化就越好，因为 Gaussian 函数 g_α 不能用作一个基小波，测不准原理(见定理 3.5)表明，只要 $\Delta_\psi\Delta_{\hat{\psi}} > \frac{1}{2}$，不管怎样的基小波都可考虑。在表 6.2.1 中，我们对于 $m=2,3,4,5,6$ 给出 $\Delta_{\psi_m}\Delta_{\hat{\psi}_m}$ 的值。注意，对于大的 m 值基数 B-小波 ψ_m 是多么接近最优的。

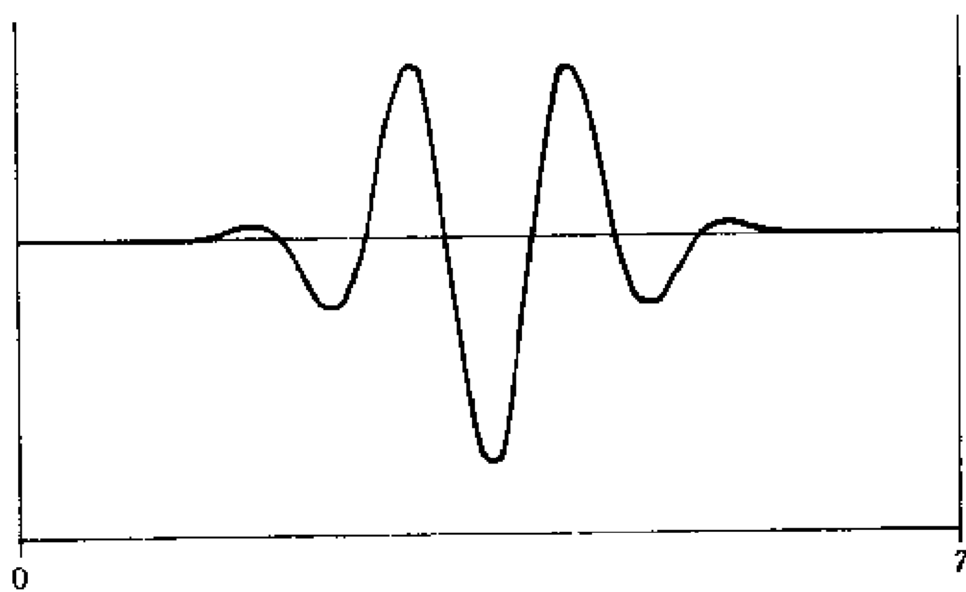


图 6.2.1 三次样条小波 ψ_4

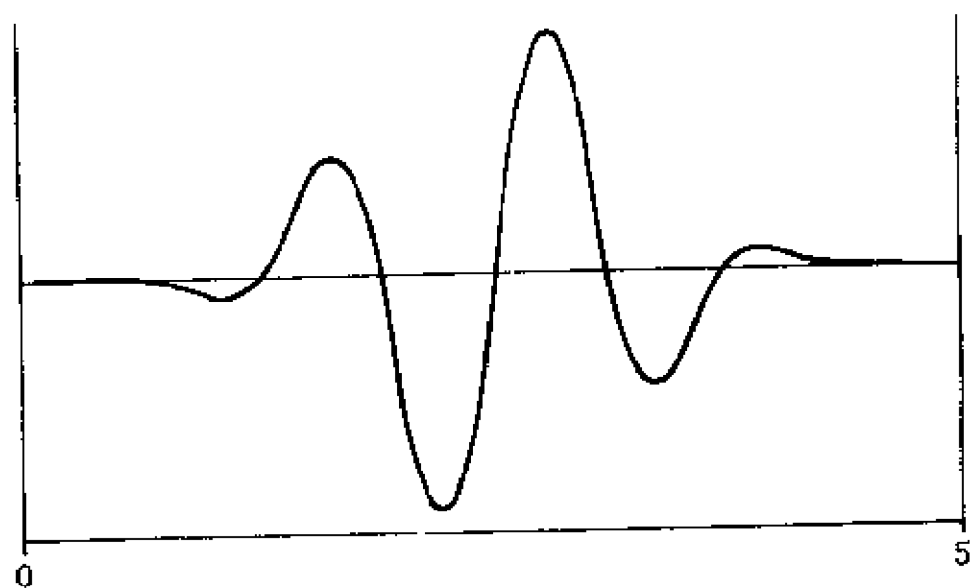


图 6.2.2 二次样条小波 ψ_3

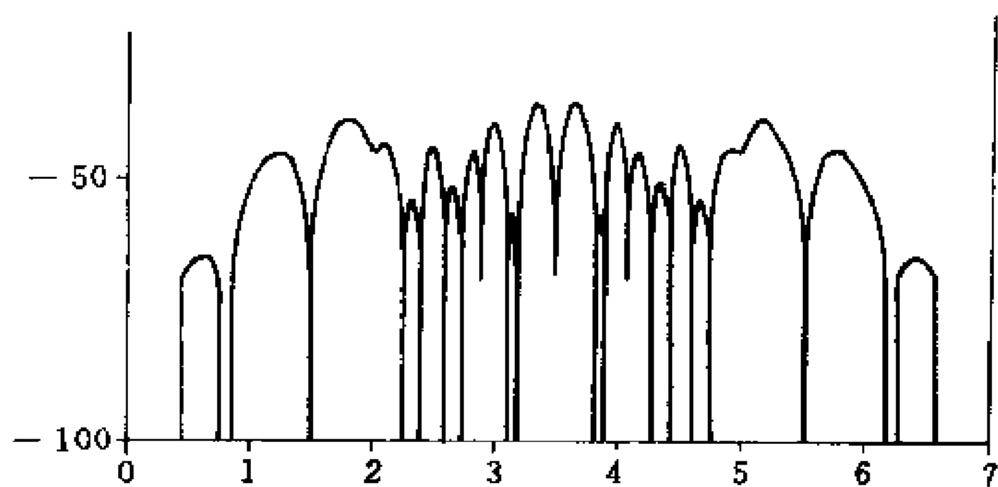


图 6.2.3　$|\varphi_4 - \mathrm{Re}G^{\alpha}_{4\;5,2\pi}|^2$(dB)，$\alpha = 0.2925$

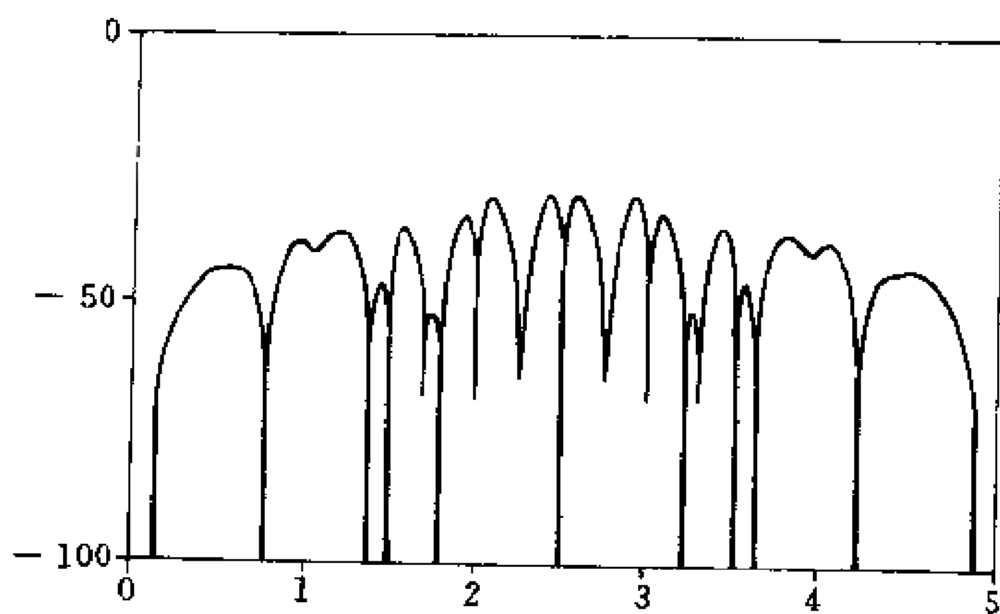


图 6.2.4　$|\varphi_3 - \mathrm{Re}G^{\alpha}_{3\;5,2\pi}|^2$(dB)，$\alpha = 0.2300$

表 6.2.1 $\Delta\psi_m$、$\Delta\hat{\psi}_m$ 的值

m	$\Delta\psi_m$与$\Delta\hat{\psi}_m$的积
2	0.971 715
3	0.535 070
4	0.504 839
5	0.500 929
6	0.500 367

6.3 基数样条小波的计算

本节专门讨论公式(6.2.5)—(6.2.6)中的紧支撑基数样条小波(或 B-小波)的一些计算方法。在 5.2 节中,计算任一紧支撑尺度函数的方法已提出来了。它由两个主要步骤组成:第一步是求相应于特征值 $\lambda=1$,并以 $\phi(1)+\cdots+\phi(N_\phi-1)=1$ 为规范化条件矩阵 $[p^\phi_{2j-k}]$,$1\leqslant j,k\leqslant N_\phi-1$ 的特征向量 $[\phi(1)\cdots\phi(N_\phi-1)]^T$,而第二步是应用在 4.3 节中描述的使用 $j_0=0$,$a^{(0)}_l=\delta_{l,0}$,$w_{m,k}=\phi(k)$ 和用 p^ϕ_k 代替 $p_{m,k}$ 的插入图形显示算法。这个方法对于任一需要的正整数 j 得到

$$\phi\left(k+\frac{l}{2^{j-1}}\right),\quad k\in\mathbb{Z},l=0,\cdots,2^{j-1}-1 \quad (6.3.1)$$

的值。现在,由小波 ψ 的两尺度关系

$$\psi(x)=\sum_k q_k\phi(2x-k)$$

能够很容易地用公式表示下述计算 ψ 在二分点上值的方法,即:

$$\psi\left(n+\frac{l}{2^j}\right)=\sum_k q_{2n-k}\phi\left(k+\frac{l}{2^{j-1}}\right)$$

$$n\in\mathbb{Z}, l=0,\cdots,2^j-1, \tag{6.3.2}$$

而且$\phi\left(k+\dfrac{l}{2^{j-1}}\right)$根据公式(6.3.1)

注意，这个方法还是由向上抽取移动平均组成。

注意，如果 p_k^ϕ 与 q_k 的值是精确的，那么上述描述的计算算法可给出 ψ 在二分点上的精确值。对于 m 阶基数样条的情况，回顾公式(4.3.3)与(6.2.6)，有

$$p_k^\phi=p_{m,k}=\begin{cases}2^{-m+1}\begin{pmatrix}m\\k\end{pmatrix} & 对于\ 0\leqslant k\leqslant m\\ 0 & 其它\end{cases} \tag{6.3.3}$$

和

$$q_{m,k}:=q_k=\begin{cases}\dfrac{(-1)^k}{2^{m-1}}\displaystyle\sum_{l=0}^{m}\begin{pmatrix}m\\l\end{pmatrix}N_{2m}(k+1-l)\\ \qquad 对于\ 0\leqslant k\leqslant 3m-2\\ 0 \qquad 其它\end{cases} \tag{6.3.4}$$

其中 $N_{2m}(k)$，$k\in\mathbb{Z}$，的值能够应用在公式(4.2.15)中提出的递推方案

$$\begin{cases}N_2(k)=\delta_{k,1}, k\in\mathbb{Z}\\ N_{n+1}(k)=\dfrac{k}{n}N_n(k)+\dfrac{n-k+1}{n}N_n(k-1)\\ 其中\ k=1,\cdots,n \quad 和 \quad n=2,\cdots,2m-1\end{cases} \tag{6.3.5}$$

计算。注意，如上述的和在公式(5.2.14)~(5.2.17)中描述的那样，公式(6.3.5)中的步骤比求相应于特征值 $\lambda=1$ 的$[p_{m,2j-k}]$，

$1 \leqslant j, k \leqslant m-1$ 和 $[p_{2m,2j-k}]$, $1 \leqslant j, k \leqslant 2m-1$ 的特征向量更有效。

基数 B 样条优于其它尺度函数计算的优点比刚才在公式(6.3.5)中的递推方法更多。本节的第一个目的是引入为更直接地计算两尺度序列 $\{q_{m,k}\}$, $k \in \mathbb{Z}$, $m=1,2,\cdots$, 的一种 Pascal 三角形算法(PTA)。如我们将会看到的那样，这个算法不仅给出了两尺度序列，而且还给出了紧支撑 m 阶 B-小波 ψ_m 的 r 次导数的基数 B-样条级数表示式

$$\psi_m^{(r)}(x) = \sum_{k=0}^{3m-2+r} q_{m,k}^{(r)} N_{m-r}(2x-k) \qquad (6.3.6)$$

的系列序列 $\{q_{m,k}^{(r)}\}$。这个 PTA 的结构连同"全正性"、"完全振荡"及"零交叉"将在 6.6 节中一起讨论。为此，我们从稍具普遍的形式描述 PTA。

下面，对于非负整数集，我们使用记号

$$\mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\cdots\} \qquad (6.3.7)$$

并且像在公式(4.5.9)中一样，$\tilde{A}(z)$ 表示序列 $\{a_n\} \in l^2$ 的符号。为了简化表示，对于任一 $n \in \mathbb{Z}_+$，我们还需要记号

$$\mathscr{L}^n := \{\{a_k\} : a_k = 0 \text{ 对于 } k < 0 \text{ 或 } k > n, \text{且 } a_0, a_n \neq 0\} \qquad (6.3.8)$$

因此 $\{\mathscr{L}^n\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, 是所有凝聚 l^2 序列类的族

$$\mathscr{L} := l^2 \cap \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{L}^n \qquad (6.3.9)$$

的一个相互不相交的划分。另外，命 τ 表示用

$$(\tau a)_{n+1} := a_n, \quad n \in \mathbb{Z}, a = \{a_n\} \in l^2 \qquad (6.3.10)$$

定义的在 l^2 上的移位算子。

定义 6.6 一个 Pascal 三角形算法是一个映射 $\mathscr{P}: \mathbb{Z}_+ \to \mathscr{L}$，它可用公式表示如下：

$$\begin{cases} \mathscr{P}(0) = \{\delta_{j,0}\} \\ (\mathscr{P}(n+1))_j = L(n,j)(\mathscr{P}(n))_j \\ \qquad\qquad + R(n,j-1)(\mathscr{P}(n))_{j-1}, \\ \qquad\qquad j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}_+ \\ \text{其中 } L(n,0) \neq 0, \text{和 } R(n,n) \neq 0 \end{cases} \tag{6.3.11}$$

定义 6.7 一个用公式(6.3.11)描述的 Pascal 三角形算法 $\mathscr{P}$ 称为是一个线性 Pascal 三角形算法(LPTA)，如果 $L(n,\cdot)$与$R(n,\cdot)$(按照第二个“变量”)都是线性的，即：对于某些$k_L(n)$，$k_R(n)$，$b_L(n)$与$b_R(n)$有

$$\begin{cases} L(n,j) = k_L(n)j + b_L(n) \\ R(n,j) = k_R(n)(n-j) + b_R(n), \ j \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{6.3.12}$$

附注 对于任一 Pascal 三角形算法 $\mathscr{P}$，很明显

$$\mathscr{P}(n) \in \mathscr{L}^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+ \tag{6.3.13}$$

另外，如果 $\mathscr{P}$ 是一个线性 Pascal 三角形算法，那么必须

$$b_L(n) \neq 0, \text{和 } b_R(n) \neq 0, \ n \in \mathbb{Z}_+ \tag{6.3.14}$$

成立，因为 $b_L(n) = L(n,0) \neq 0$ 和 $b_R(n) = R(n,n) \neq 0$。

因为公式(6.3.11)中的初始条件 $\mathscr{P}(0) = \{\delta_{j,0}\}$，一个 Pascal 三角形算法能够作为对计算序列

$$s^n := \mathscr{P}(n) \in \mathscr{L}^n, \quad n = 1,2,\cdots$$

的一个“树”算法。更确切地说，如果图 6.3.1 中的构形解释为

$$\begin{cases} u = at_1 + bt_2 \\ u = bt_2, \quad 和 \\ u = at_1, \quad 分别 \end{cases} \tag{6.3.15}$$

那么一个 Pascal 三角形算法的树的构形能够用图 6.3.2 描述，其中我们使用了记号

$$L_{n,k} := L(n,k)$$

$$R_{n,k} := R(n,k)$$

$$s_k^n = (\mathbf{s}^n)_k$$



图 6.3.1 Pascal 三角形算法的说明

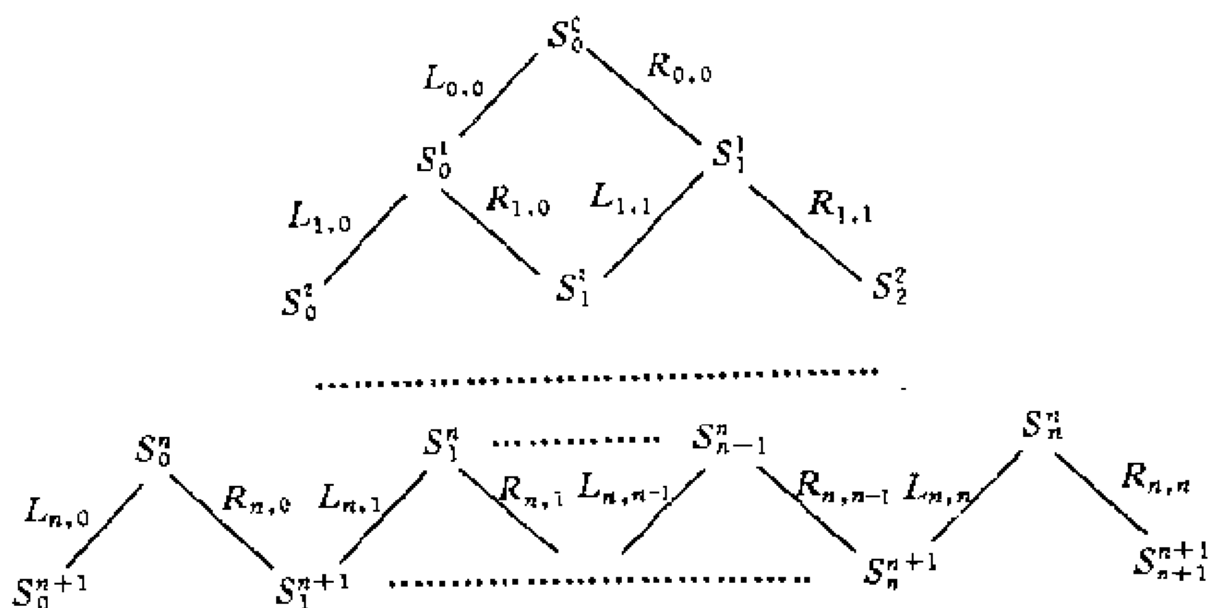


图 6.3.2 Pascal 三角形

例子 6.8 研究用

$$L(n,j)=R(n,j)=1,\quad n\in\mathbb{Z}_+, j\in\mathbb{Z}\tag{6.3.16}$$

确定的线性 Pascal 三角形算法 $\mathscr{P}_b$（即，$k_L(n)=k_R(n)=0$ 和 $b_L(n)=b_R(n)=1$）。那么，图 6.3.2 中的 Pascal 三角形是计算二项式系数

$$\left\{\binom{n}{j}\right\}=\mathscr{P}_b(n),\quad n\in\mathbb{Z}_+\tag{6.3.17}$$

的著名算法。

例 6.9 考虑用

$$\begin{cases} L(n,j)=j+1 \\ R(n,j)=(n-j)+1 \end{cases}\tag{6.3.18}$$

确定的线性 Pascal 三角形算法 $\mathscr{P}e$（即，$k_L(n)=k_R(n)=b_L(n)=b_R(n)=1$）。那么，图 6.3.2 中的 Pascal 三角形能够用于计算由

$$\widetilde{E}_n(z):=n!\sum_{j=0}^{n-1}N_{n+1}(j+1)z^j\tag{6.3.19}$$

定义的 n 阶（$n-1$ 次）修改的 Euler-Frobenius 多项式 $\widetilde{E}_n$（见本例子的下述附注）的系数序列，而在

$$\mathscr{P}_e(n-1)=\{n!N_{n+1}(j+1)\}_{j=0}^{n-1},\ n=1,2,\cdots\tag{6.3.20}$$

意义上。这是对基数 B-样条递推方案公式（4.2.15）或（6.3.5）的一个推论。能够证明，这个线性 Pascal 三角形算法得出

$$N_{n+1}(j+1)=\frac{1}{n!}\sum_{\nu=0}^{j}(-1)^\nu\binom{n+1}{\nu}(j+1-\nu)^n$$

表 6.3.1 修改的 Euler-Frobenius 多项式

n	$\widetilde{E}_n(z)$
1	1
2	$1-z$
3	$1+4z+z^2$
4	$1+11z+11z^2+z^3$
5	$1+26z+66z^2+26z^3+z^4$
6	$1+57z+302z^2+302z^3+57z^4+z^5$
7	$1+120z+1\,191z^2+2\,416z^3+1\,191z^4+120z^5+z^6$
8	$1+247z+4\,293z^2+15\,619z^3+15\,619z^4+4\,293z^5+247z^6+z^7$
9	$1+502z+14\,608z^2+88\,234z^3+156\,190z^4+88\,234z^5+14\,608z^6+502z^7+z^8$

特别是,在表 6.3.1 中,我们列举了前九个修改的Euler-Frobenius多项式。

附注 回忆公式(4.6.6),m 阶 Euler-Frobenius 多项式定义为

$$E_m(z) = m!\sum_{k\in\mathbb{Z}} N_{m+1}\left(\frac{m+1}{2}+k\right)z^{k+m/2}$$

因此,对于奇数 m,有

$$\begin{aligned}E_{2n-1}(z) &= (2n-1)!\sum_{k\in\mathbb{Z}} N_{2n}(n+k)z^{k+n-1}\\ &= (2n-1)!\sum_{k=0}^{2n-2} N_{2n}(k+1)z^k\end{aligned}$$

这个与公式(4.2.18)相同。然而,对于偶数 m,$E_m(z)$的系数不再是

基数 B-样条 N_{m+1} 在整数点的值，因此公式(4.2.15)或(6.3.5)的递推方法不适用。由于这种计算的原因，公式(6.3.19)中引入修改的 Euler Frobenius 多项式 $\widetilde{E}_n(z)$。我们已经看到 $\widetilde{E}_{2m-1}(z) = E_{2m-1}(z)$。在其它的应用中，$\widetilde{E}_{2m}$ 不是很有用的，因为(具有节点序列 $\mathbb{Z}$)的奇阶基数样条在节点 $\mathbb{Z}$ 上插值是"不适定的"(例如，系数矩阵不可逆)。这个由表 6.1，并根据

$$\widetilde{E}_{2m}(-1) = 0, m = 1,2,\cdots$$

得到。引入 $\widetilde{E}_{2m}$ 的另一原因是由于在整数节点的基数 B-样条递推方案公式(6.3.5)，$\widetilde{E}_n$ 与 $\widetilde{E}_{n+1}$ 之间存在一个非常好的关系，即

$$\widetilde{E}_{n+1}(z) = (1 + nz)\widetilde{E}_n(z) + z(1 - z)\widetilde{E}_n'(z), \tag{6.3.21}$$

$$n = 1,2,\cdots$$

公式(6.3.21)的证明是公式(6.3.5)的一个直接应用。这个恒等式在 6.5 节中将是有用的。

现在回到公式(6.3.4)表示的 m 阶基数 B-小波 ψ_m 的两尺度序列 Pascal 三角形算法。如上所述，在计算 $\{q_{m,k}\}$ 时，这个相同的 Pascal 三角形算法可以用来得到 ψ_m 的 r 次导数 $\psi_m^{(r)}, r = 0, \cdots, m-1$，的 B-样条级数的系数序列 $\{q_{m,k}^{(r)}\}$。为了避免任何符号的变化，引入记号

$$\begin{cases} \widetilde{q}_{m,k}^{(r)} := |q_{m,k}^{(r)}| = (-1)^k q_{m,k}^{(r)} \\ \widetilde{q}_{m,k}^{(0)} := |q_{m,k}| = (-1)^k q_{m,k} \end{cases} \tag{6.3.22}$$

我们有下述结果。

定理 6.10 对于每个正整数 m，令 $\mathscr{D}_m$ 是具有

$$L(n,j) = \begin{cases} j + 1 & \text{对于 } 0 \leqslant n < 2m - 2 \\ 1 & \text{对于 } n \geqslant 2m - 2 \end{cases} \tag{6.3.23}$$

和

$$R(n,j)=\begin{cases}(n-j)+1 & \text{对于 } 0\leqslant n<2m-2\\ 1 & \text{对于 } n\geqslant 2m-2\end{cases}\tag{6.3.24}$$

的线性 Pascal 三角形算法。那么，对于 $r=0,\cdots,m-1$，

$$(\mathscr{P}_m(3m-2+r))_k=(2m-1)!2^{m-r-1}\tilde{q}_{m,k}^{(r)}\tag{6.3.25}$$

附注 注意到公式(6.3.23)与(6.3.24)，在线性 Pascal 三角形算法中，对于所有 $n\in\mathbb{Z}$，有 $b_L(n)=b_R(n)=1$ 以及

$$k_L(n)=k_R(n)=\begin{cases}1 & \text{对于 } 0\leqslant n<2m-2\\ 0 & \text{对于 } n\geqslant 2m-2\end{cases}$$

证明 再次使用记号

$$\begin{cases}s^n:=\mathscr{P}_m(n)\\ s_j^n:=(s^n)_j\\ \tilde{S}^n(z):=\sum\limits_j s_j^n z^j\end{cases}\tag{6.3.26}$$

那么，由于公式(6.3.23)与(6.3.24)，依次应用例子 6.9 与 6.8 的结果，我们有

$$\tilde{S}^n(z)=\begin{cases}\tilde{E}_{n+1}(z) & \text{对于 } 0\leqslant n<2m-2\\ E_{2m-1}(z)(1+z)^{n-2m+2} & \text{对于 } n\geqslant 2m-2\end{cases}$$

(注意 $\tilde{E}_{2m-1}=E_{2m-1}$。)因此，$s^{3m-2+r}$ 的符号用下式给出：

$$\tilde{S}^{3m-2+r}(z)=E_{2m-1}(z)(1+z)^{m+r},\quad r=0,\cdots,m-1\tag{6.3.27}$$

另一方面，应用定理 4.3 中的恒等式(vii)，我们有

$$q_{m,k}^{(r)} = 2^r \sum_{l=0}^{r} (-1)^l \binom{r}{l} q_{m,k-l} \tag{6.3.28}$$

所以，因为$\{q_{m,k}\}$的符号(它是与尺度函数 N_m 有关的 B-小波 ψ_m 两倍两尺度符号 Q)是

$$2Q_m(z) = 2^{-m+1} \frac{1}{(2m-1)!} E_{2m-1}(-z)(1-z)^m$$

(见公式(6.2.5))，由公式(6.3.28)得到，$\{q_{m,k}^{(r)}\}$的符号可表示为

$$2^{-m+r+1} \frac{1}{(2m-1)!} E_{2m-1}(-z)(1-z)^{m+r} \tag{6.3.29}$$

所以，如果用$(2m-1)!\ 2^{m-r-1}$乘公式(6.3.29)中的表示式并且变 $-z$ 为 z，就得到 $\mathscr{P}_m(3m-2+r)$ 在公式(6.3.27)中的符号 $\tilde{S}^{3m-2+r}$。也就是说，的确推出了公式(6.3.25)。 ●

因为 B-小波是一个 m 阶基数样条，它的$(m-1)$阶导数是在 $j/2, j=0,\cdots 4m-2$，具有跳跃的一个阶梯函数 $\psi_m^{(m-1)}$。因此，为了得到 ψ_m，可以简单地积分这个阶梯函数$(m-1)$次。通常，为了生成任何 B-小波级数

$$g(x) = \sum_j d_j \psi_m(x-j) \tag{6.3.30}$$

可以对下面的阶梯函数进行积分：

$$g^{(m-1)}(x) = \sum_j d_j \psi_m^{(m-1)}(x-j)$$

当然，如果工程师喜欢使用“脉冲系列”(即，δ 函数的级数)，那么就可以使用级数

$$g^{(m)}(x) = \sum_j d_j \psi_m^{(m)}(x-j)$$

这需要一个额外的积分。

定理 6.11 对于每个正整数 m，令

$$\mathscr{P}_m(4m-3) = s^{4m-3} = \{s_j^{4m-3}\}_{j=0}^{4m-3}$$

并且令 $\chi_{[0,\frac{1}{2})}$ 表示区间$[0,\frac{1}{2})$的特征函数。那么，m 阶 B-小波用公式(6.3.31)给出，即：

$$\psi_m(x) = \frac{1}{(2m-1)!}\sum_{j=0}^{4m-3}(-1)^j s_j^{4m-3} \tag{6.3.31}$$

$$\times \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{m-2}} \chi_{[0,\frac{1}{2})}(x_{m-1}-\frac{j}{2})dx_{m-1}$$

计算 B-小波(和像公式(6.3.30)中的任一 B-小波级数)的另一种方法是计算它的每个多项式段的 B-网表示式。这不仅可给出像用一般计算方法公式(6.3.2)给出的在二分点 $x=n+l/2^l$ 的 $\psi_m(x)$的值，而且还可给出在每个点 $x\in\mathbb{R}$ 的 $\psi_m(x)$的值。有效的计算可以通过简单地取序列 $\mathscr{P}_m(3m-2)$的移动平均来完成，这还得应用在 4.4 节中基数 B-样条 B-网算法得到的 m 阶基数 B-样条 $N_m(2x)$的 B-网序列。(对于二次、三次和四次基数 B 样条的 B-网见例子 4.11)。

6.4 Euler-Frobenius 多项式

已经看到，在基数样条插值(见 4.6 与 6.1 节)和基数样条小波的构造与分析(见 6.1 — 6.3 节)中，Euler-Frobenius 多项式 $E_m(z)$起了很重要的作用。在本节中，我们将更详细地研究这些多项式，特别注意它们的零点结构。这些结构在公式(4.2.18)～

(4.2.21)中为了确定 N_m 的尖锐下 Riesz 界已经使用，并且将在下节中在样条小波分解的误差分析中再次起重要的作用。虽然奇阶和偶阶 Euler-Frobenius 多项式的性质是相同的，而且这些性质的导出是十分类似的，但为了不重复类似的论证，将只考虑奇阶多项式，因为偶阶多项式在样条小波的研究中没有使用。

类似于公式(4.6.8)，应用 Poisson 求和公式(2.5.8)，具有 $z=e^{-i\omega}$的 Euler-Frobenius 多项式 $E_{2m-1}(z)$能够写为

$$
\begin{aligned}
E_{2m-1}(z) :&= (2m-1)!\sum_{k=0}^{2m-2} N_{2m}(k+1)z^k \qquad (6.4.1)\\
&= (2m-1)!\,e^{i\omega}\sum_{k}\hat{N}_{2m}(\omega+2\pi k)\\
&= (2m-1)!\,e^{-i(m-1)\omega}\left(2\sin\frac{\omega}{2}\right)^{2m}\\
&\quad\times\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\omega+2\pi k)^{2m}}
\end{aligned}
$$

(见公式(3.2.16))。用定义

$$
e_n(\omega) := \left(2\sin\frac{\omega}{2}\right)^{n+2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\omega+2\pi k)^{n+2}} \qquad (6.4.2)
$$

由公式(6.4.1)得到

$$
\begin{aligned}
e_{2m-2}(\omega) &= \frac{1}{(2m-1)!}z^{-m+1}E_{2m-1}(z) \qquad (6.4.3)\\
&= \sum_{k=-m+1}^{m-1} N_{2m}(m+k)z^k\\
&= N_{2m}(m) + 2\sum_{k=1}^{m-1} N_{2m}(m+k)\cos k\omega
\end{aligned}
$$

作为公式(6.4.1)与(6.4.3)的一个推论，很明显，$e_n(\omega)$完全用递推关系表征如下：

$$\begin{cases} e_{n+1}(\omega) = (\cos\frac{\omega}{2})e_n(\omega) - \frac{2}{n+2}(\sin\frac{\omega}{2})e'_n(\omega) \\ e_0(\omega) = 1 \end{cases} \tag{6.4.4}$$

e_n的另一公式为

$$e_n(\omega) = (\sin\frac{\omega}{2})^{n+2}\frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!}(D^{n+1}\cot)(\frac{\omega}{2}) \tag{6.4.5}$$

这个由公式(4.2.9)得到，其中 D 是微分算子。考虑到公式(6.4.4)与(6.4.5)表示式，为了求它方便，引入新变量

$$x = \cos\frac{\omega}{2} \tag{6.4.6}$$

因此公式(6.4.4)变为

$$\begin{cases} U_{n+1}(x) = xU_n(x) + \frac{1-x^2}{n+2}U'_n(x) \\ U_0(x) = 1 \end{cases} \tag{6.4.7}$$

其中：

$$U_n(x) := e_n(\omega) \tag{6.4.8}$$

附注 由公式(6.4.7)，计算 U_n，$n\in\mathbb{Z}_+$，是十分容易的。例如，我们有

$$U_1(x) = x$$

$$U_2(x) = \frac{1}{3}(1+2x^2)$$

$$U_3(x) = \frac{1}{3}(2x + x^3)$$

$$U_4(x) = \frac{1}{15}(2 + 11x^2 + 2x^4)$$

由这个附注发现，至少对于 $0 \leqslant n \leqslant 4$，$U_n(x)$是精确 n 次的一个多项式，并且具有正的首项系数。而且 $U_n(1) = 1$ 而对于偶数 n，U_n 是一个偶函数；对于奇数 n，U_n 是一个奇函数。同样的性质对于所有 $n \in \mathbb{Z}_+$ 仍然保持，它可用数学归纳法建立。事实上，人们甚至能够得到如下一些关于 U_n 零点的更有意义的结论。

引理 6.12 对于每个 $n \in \mathbb{Z}_+$，$U_n(x)$是精确 n 次的一个多项式，如果 n 是偶数，它只由偶次幂组成；而如果 n 是奇数，它只由奇次幂组成，使 $U_n^{(n)} > 0$ 并且 $U_n(1) = 1$。而且 U_n 的所有零点是简单的且为纯虚数的。

证明 我们只关心最后一个叙述。另外，因为考虑实零点较容易，所以研究

$$u_n(x) = \frac{1}{i^n} U_n(ix), \quad n \in \mathbb{Z}_+ \tag{6.4.9}$$

而不是研究 U_n；并且只要证明，u_n 的所有零点是简单的且为实的就足够了。由公式(6.4.7)，我们还有

$$\begin{cases} u_{n+1}(x) = xu_n(x) - \dfrac{1 + x^2}{n + 2} u'_n(x) \\ u_0(x) = 1 \end{cases} \tag{6.4.10}$$

因此，容易看到对于偶数 n，u_n 是偶的；而对于奇数 n，u_n 是奇数。另外，由公式(6.4.9)，得到

$$u_n^{(n)}(x) = U_n^{(n)}(ix)$$

这意味着 u_n 的首项系数还是正的。现在用归纳法处理。

(1) 假定 u_{2k} 只具有简单且实的零点。那么，因为 u_{2k} 是一个偶函数，它在 0 处不可能有一个零点，并且它的所有零点都以对称对出现，比如说 $\pm\xi_j$；其中

$$0 < \xi_1 < \cdots < \xi_k$$

现在，u'_{2k}在这些零点不可能变为零，而事实上，序列

$$\{u'_{2k}(-\xi_k),\cdots,u'_{2k}(-\xi_1),u'_{2k}(\xi_1),\cdots,u'_{2k}(\xi_k)\}$$

必须(严格)符号交错。因此，既然公式(6.4.10)断定

$$u_{2k+1}(\pm\xi_j) = -\frac{1+\xi_j^2}{n+1}u'_{2k}(\pm\xi_j)$$

所以序列

$$\{u_{2k+1}(-\xi_k),\cdots,u_{2k+1}(-\xi_1),u_{2k+1}(\xi_1),\cdots,u_{2k+1}(\xi_k)\} \tag{6.4.11}$$

也必须(严格)符号交错。如果是一个奇函数，u_{2k+1} 必须在 0 处变为零，并且由公式(6.4.11)中的符号规范，它在 ξ_j 与 ξ_{j+1}，$j=1,\cdots,k-1$，之间至少有一个零点。所以，u_{2k+1} 在开区间$(-\xi_k,\xi_k)$中至少有 $2(k-1)+1=2k-1$ 个零点。现在，根据 u_{2k} 具有正的首项系数这个事实，得到 $u'_{2k}(\xi_k)>0$(因为 ξ_k 是最大的零点)。因此，再由公式(6.4.10)，有

$$u_{2k+1}(\xi_k) = -\frac{1+\xi_k^2}{n+1}u'_{2k}(\pm\xi_k) < 0$$

这样，因为 u_{2k+1} 的首项系数也是正的，u_{2k+1} 必定至少有一个零点在 ξ_k 的右边；因为是奇函数，它必定还有一个零点在 $-\xi_k$ 的左边。这就证明了 u_{2k+1} 具有 $2k+1$ 简单实零点。

(2) 假定 u_{2k+1} 在 $\pm\eta_j$ 与 0，具有只是简单实根，其中

$0<\eta_1<\cdots<\eta_k$。那么，通过和(1)的同样论证，可以断定 u_{2k+2} 在每个区间 $(0,\eta_1),\cdots,(\eta_{k-1},\eta_k),(\eta_k,\infty)$ 都有根。因此，如果是偶函数，u_{2k+2} 具有 $2k+2$ 个简单实零点。 ●

应用引理 6.12，由 U_n 与 e_n 在公式(6.4.8)中的同化，可以断定

$$\begin{cases} e_{2k}(\omega) = U_{2k}(x) = c_k \prod_{j=1}^{k} (x^2 + \alpha_j^2), \\ \qquad 0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k, c_k > 0 \\ e_{2k+1}(\omega) = U_{2k+1}(x) = d_k x \prod_{j=1}^{k} (x^2 + \beta_j^2), \\ \qquad 0 < \beta_1 < \cdots < \beta_k, d_k > 0 \end{cases} \tag{6.4.12}$$

其次，必须把 U_n 的虚数零点与 Euler-Frobenius 多项式的零点连系起来。注意，由 $z=e^{-i\omega}$ 这一事实和 x 与 ω 之间的关系公式(6.4.6)，对于任一 $\alpha>0$，

$$\begin{aligned} x^2 + \alpha^2 &= \left(\frac{e^{i\omega/2} + e^{-i\omega/2}}{2}\right)^2 + \alpha^2 \\ &= \frac{1}{4}\{z + (2 + 4\alpha^2) + z^{-1}\} \\ &= \frac{z^{-1}}{4}\{z^2 + (2 + 4\alpha^2)z + 1\} \\ &= \frac{z^{-1}}{4}(z - a_1)(z - a_2) \end{aligned}$$

其中

$$a_1, a_2 = \frac{-(2 + 4\alpha^2) \pm \sqrt{(2 + 4\alpha^2)^2 - 4}}{2}$$

$$= -(1+2\alpha^2) \pm 2\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$$

所以，设

$$a_1 = -(1+2\alpha^2) - 2\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$$

就有

$$a_2 = \frac{1}{a_1} \quad 且 \quad -1 < a_2 < 0$$

因此，对于任一 $\alpha>0$，可以得出结论

$$\begin{cases} (x^2+\alpha^2) = \dfrac{z^{-1}}{4}(z-\gamma)(z-\dfrac{1}{\gamma}) \\ 其中\ -1<\gamma<0 \end{cases} \tag{6.4.13}$$

为把这个结果应用公式(6.4.12)，设

$$\lambda_j = -(1+2\alpha_j^2) + 2\alpha_j\sqrt{1+\alpha_j^2}$$

那么，很明显，$-1<\lambda_j<0$ 并且

$$e_{2k}(\omega) = c_k\frac{1}{4^k}z^{-k}\sum_{j=1}^{k}(z-\lambda_j)(z-\frac{1}{\lambda_j}) \tag{6.4.14}$$

其中 $z=e^{-i\omega}$。当把公式(6.4.14)代入公式(6.4.3)时，得到下述结果。

定理 6.13 令 m 是任一正整数。那么，$2m-1$ 阶（或 $2m-2$ 次）Euler-Frobenius 多项式能够写为

$$E_{2m-1}(z) = \prod_{j=1}^{2m-2}(z-\lambda_{m,j}) \tag{6.4.15}$$

其中

$$\lambda_{m,2m-2} < \lambda_{m,2m-3} < \cdots < \lambda_{m,m}$$
$$< -1 < \lambda_{m,m-1} < \cdots < \lambda_{m,1} < 0 \quad (6.4.16)$$

并且

$$\lambda_{m,1}\lambda_{m,2m-2} = \cdots = \lambda_{m,m-1}\lambda_{m,m} = 1 \quad (6.4.17)$$

6.5 样条小波分解中的误差分析

在 6.2 节中，当紧支撑基数样条小波（或 B -小波）ψ_m 被引入公式(6.2.5)中时，公式(6.2.4)中对于 $K(z)$的规范化参数 c_0 与 n_0 的选择是 $c_0 = -\frac{1}{(2m-1)!}$与 $n_0 = 1$。因此，相应于在定理5.16中分解关系公式(5.3.16)的在公式(5.3.15)中的符号 $G(z)$与 $H(z)$用

$$\begin{cases} G(z) = \dfrac{1}{2}\sum_n g_n z^n = z^{-1}\left(\dfrac{1+z}{2}\right)^m \dfrac{E_{2m-1}(z)}{E_{2m-1}(z^2)} \\ H(z) = \dfrac{1}{2}\sum_n h_n z^n = -z^{-1}\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^m \dfrac{(2m-1)!}{E_{2m-1}(z^2)} \end{cases} \quad (6.5.1)$$

给出（见公式(6.2.1)与(5.4.11)）。现在，回忆公式(5.4.46)，对于分解算法公式(5.4.48)的序列选择是

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{2}g_{-n} \\ b_n = \dfrac{1}{2}h_{-n} \end{cases} \quad (6.5.2)$$

所以，对于非 Haar 样条小波（即 $m \geq 2$），“权”序列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$是无限序列而且必须截断，以便应用在公式(5.4.48)中的（有限）移动平均方案。

附注 对于重构算法公式(5.4.49)的权序列是有限序列

$$
\begin{cases}
p_n = 2^{-m+1}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}, \; n = 0, \cdots, m \\
q_n = (-1)^n 2^{-m+1} \sum_{l=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix} N_{2m}(n+1-l), \\
\qquad n = 0, \cdots, 3m-2
\end{cases}
\tag{6.5.3}
$$

对于任何阶 m，它们能够很容易地使用像例子 6.8 与 6.9 中讨论过的线性 Pascal 三角形算法计算。另外，因为 $G(z)$ 与 $H(z)$ 是有理函数，可以想象，递推算法无须截断就能用于分解。然而，这里我们不讨论这个方法。

注意，公式(6.5.1)提供给公式(6.5.1)—(6.5.2)的加权分解序列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的无限量的唯一的相乘因子是 $1/E_{2m-1}(z^2)$。现在分析由于截断因子的结果引起的"误差"。

我们从考虑 $2m$ 阶基本基数样条

$$
L_{2m}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(2m)} N_{2m}(x+m-k) \tag{6.5.4}
$$

开始，$L_{2m}(x)$ 已经在 4.6 与 6.1 节中讨论过了（见公式(6.1.8)）。回忆公式(6.1.12)与(6.1.13)，公式(6.5.4)中的系数序列 $\{c_k^{(2m)}\}$ 的符号是广义 Euler-Frobenius Laurent 多项式 $F_m := E_{y_m}$ 的倒数，即：

$$
\tilde{C}^{(2m)}(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(2m)} z^n = \frac{1}{F_m(z)} = \frac{(2m-1)!\, z^{m-1}}{E_{2m-1}(z)} \tag{6.5.5}
$$

其中 E_{2m-1} 是在前节中研究过的 $2m-1$ 阶（或 $2m-2$ 次）Euler-Frobenius 多项式。所以，$1/E_{2m-1}(z^2)$ 的截断等价于截断基本基数样条 L_{2m} 的 B-样条级数表示公式(6.5.4)。为了方便，通过设

$$a_n = a_n^{(m)} := \frac{1}{(2m-1)!} c_n^{(2m)} \tag{6.5.6}$$

把因子$(2m-1)!$与$\{c_n^{(2m)}\}$合并，所以公式(6.5.5)变成

$$\frac{z^{m-1}}{E_{2m-1}(z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \tag{6.5.7}$$

现在，对于正整数 N，用引入

$$T_m^N(z) := \sum_{n=-N}^{N} a_n z^n \tag{6.5.8}$$

把这个 Laurent 级数截短。如果公式(6.5.7)中的量用公式(6.5.8)中的量代替，对于公式(6.5.1)中的 G 与 H，可得到

$$\begin{cases} G_N(z) = \frac{1}{2}\sum_n g_{N,n} z^n := \left(\frac{1+z}{2}\right)^m z^{-2m+1} E_{2m-1}(z) T_m^N(z^2) \\ H_N(z) = \frac{1}{2}\sum_n h_{N,n} z^n \\ \qquad := -(2m-1)!\left(\frac{1-z}{2}\right)^m z^{-2m+1} T_m^N(z^2) \end{cases} \tag{6.5.9}$$

有限“截断”分解序列现在是

$$\begin{cases} a_{N,n} = \frac{1}{2} g_{N,-n} \\ b_{N,n} = \frac{1}{2} h_{N,-n} \end{cases} \tag{6.5.10}$$

显然，由公式(6.5.9)，截断序列的支撑可用下式给出：

$$\begin{cases} \sup\{a_{N,n}\} = [-2N - m + 1, 2N + 2m - 1] \cap \mathbb{Z} \\ \sup\{b_{N,n}\} = [-2N - m - 1, 2N + 2m + 1] \cap \mathbb{Z} \end{cases} \tag{6.5.11}$$

当使用有限序列$\{a_{N,n}\}$与$\{b_{N,n}\}$代替原来的序列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$作为在分解算法公式(5.4.48)中权时，将有一些偏差。为度量这个误差，简单地比较截断此分解分量的完全的重构与原来的有限能量序列。精确地说，令

$$\begin{cases} f_j(x) = \sum_k c_k^j N_m(2^j x - k) \\ c^j = \{c_k^j\} \end{cases} \tag{6.5.12}$$

是在 V_j^m 中的任一基数 B-样条序列。序列 c^j 是信号 f_j 的一种有限能量序列表示。如果 f_j 分解为

$$f_j = f_{N,j-1} + g_{N,j-1} \tag{6.5.13}$$

其中 $f_{N,j-1} \in V_{j-1}^m$ 和 $g_{N,j-1} \in W_{j-1}^m$，使用(有限)分解算法

$$\begin{cases} c_{N,k}^{j-1} = \sum_l a_{N,l-2k} c_l^j \\ d_{N,k}^{j-1} = \sum_l b_{N,l-2k} c_l^j \end{cases} \tag{6.5.14}$$

那么，我们将比较它的分解分量

$$\begin{cases} c_N^{j-1} := \{c_{N,k}^{j-1}\}, & k \in \mathbb{Z} \\ d_N^{j-1} := \{d_{N,k}^{j-1}\}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

的完全的重构 c_N^j，即 $c_N^j = \{c_{N,k}^j, k \in \mathbb{Z}$，其中

$$c_{N,k}^j = \sum_l [p_{k-2l} c_{N,l}^{j-1} + q_{k-2l} d_{N,l}^{j-1}] \tag{6.5.15}$$

与原来的序列 c^j，其中 $\{p_k\}$ 与 $\{q_k\}$ 用公式(6.5.3)给出。使用 l^2 度量，截断误差量是

$$\varepsilon_N^{(m)}(c^j) := \left\{\sum_{l\in\mathbb{Z}} |c_l^j - c_{N,l}^j|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{6.5.16}$$

因为基数 B-样条 N_m 生成 V_0^m 的一个 Riesz 基，公式(6.5.16)中误差度量等价于

$$\tilde{\varepsilon}_N^{(m)}(f_j) := \| f_j - f_{N,j} \|_2 \tag{6.5.17}$$

其中

$$f_{N,j} := \sum_k c_{N,k}^j N_m(2^j x - k) \tag{6.5.18}$$

而 $\{c_{N,k}^j\}$ 用公式(6.5.15)给出。

为了这个误差分析，需要下述对于基本基数样条的 B-样条级数的系数的表示。

引理 6.14 令 $\lambda_{m,j}, j=1,\cdots,2m-2$，是像定理 6.13 中的 $2m-1$ 阶 Euler-Frobenius 多项式 E_{2m-1} 的零点。那么，公式(6.5.7)中的 Laurent 级数的系数，对于所有 $j\in\mathbb{Z}$，用公式(6.5.19)给定：

$$a_j = a_j^{(m)} = \sum_{k=1}^{m-1}\left[\frac{\lambda_{m,k}^{m-2}}{E'_{2m-1}(\lambda_{m,k})}\right]\lambda_{m,k}^{|j|} \tag{6.5.19}$$

证明 为了建立公式(6.5.19)，对于公式(6.3.19)中定义的修改的 Euler-Frobenius 多项式 $\tilde{E}_n$，需要公式(6.3.21)中的恒等式。回忆

$$E_{2m-1}(z) = \tilde{E}_{2m-1}(z), \quad m = 1,2,\cdots$$

但是对于所有 m，$\tilde{E}_{2m} \neq E_{2m}$。现在，用公式(6.3.21)与(6.4.17)，我们有

$$\begin{cases}\widetilde{E}_{2m}(\lambda_{m,j}) = \lambda_{m,j}(1-\lambda_{m,j})E'_{2m-1}(\lambda_{m,j}) \\ \widetilde{E}_{2m}(\lambda_{m,j}^{-1}) = -\frac{1}{\lambda_{m,j}^{2}}(1-\lambda_{m,j})E'_{2m-1}(\lambda_{m,j}^{-1})\end{cases} \tag{6.5.20}$$

因此，由简单的观察

$$\widetilde{E}_{2m}(\lambda_{m,j}) = \lambda_{m,j}^{2m-1}\widetilde{E}_{2m}(\lambda_{m,j}^{-1})$$

和公式(6.5.20)，可得到

$$E'_{2m-1}(\lambda_{m,j}^{-1}) = -\lambda_{m,j}^{-2m+4}E'_{2m-1}(\lambda_{m,j}) \tag{6.5.21}$$

利用部分分式分解并且依次使用公式(6.5.21)与(6.4.17)中的关系，得到

$$\begin{aligned}\frac{z^{m-1}}{E_{2m-1}(z)} &= \sum_{j=1}^{2m-2}\frac{\lambda_{m,j}^{m-1}}{(z-\lambda_{m,j})E'_{2m-1}(\lambda_{m,j})} \\ &= \sum_{j=1}^{m-1}\left\{\frac{\lambda_{m,j}^{m-1}}{E'_{2m-1}(\lambda_{m,j})z\left(1-\frac{\lambda_{m,j}}{z}\right)}\right. \\ &\qquad \left.-\frac{\lambda_{m,j}^{m-2}}{E'_{2m-1}(\lambda_{m,j})(1-\lambda_{m,j}z)}\right\} \\ &= \sum_{j=1}^{m-1}\frac{\lambda_{m,j}^{m-2}}{E'_{2m-1}(\lambda_{m,j})}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lambda_{m,j}^{|n|}z^{n}, \quad |z|=1\end{aligned} \tag{6.5.22}$$

这就建立了公式(6.5.19)。 ●

附注 在公式(6.5.19)中，设

$$a_j = a_j^{(m)} = \sum_{k=1}^{m-1}\kappa_k^{(m)}\lambda_{m,k}^{|j|}, \quad j\in\mathbb{Z} \tag{6.5.23}$$

应用公式(6.3.21)有

$$\kappa_k^{(m)} = \frac{\lambda_{m,k}^{m-2}}{E'_{2m-1}(\lambda_{m,k})} = \lambda_{m,k}^{m-1}(1 - \lambda_{m,k})\widetilde{E}_{2m}^{-1}(\lambda_{m,k})$$

(6.5.24)

其中 $\widetilde{E}_{2m}$ 是 $2m$ 阶修改的 Euler-Frobenius 多项式。因此，公式(6.5.24)简化了 $\kappa_k^{(m)}$ 的计算，因而就简化了公式(6.5.23)中 $\alpha_j^{(m)}$ 的计算，因为 $\widetilde{E}_{2m}$ 容易计算(见在例子 6.9 中线性 Pascal 三角形算法与公式(6.3.21))。

为了用公式表示公式(6.5.16)中误差测量的估计，回忆在公式(6.1.13)中引入的记号

$$F_m(z) = \frac{1}{(2m-1)!}\frac{E_{2m-1}(z)}{z^{m-1}} \tag{6.5.25}$$

并且定义

$$R_m^N(z) := (2m-1)!F_m(z^2)\sum_{j=1}^{m-1}\kappa_j^{(m)} \times \left\{\frac{z^{-2N-2}}{1-\lambda_{m,j}z^{-2}} + \frac{z^{2N+2}}{1-\lambda_{m,j}z^2}\right\}\lambda_{m,j}^{N+1} \tag{6.5.26}$$

有下述结果。

定理 6.15 对于任一正整数 m，对于任何 $c \in l^2$，有

$$\varepsilon_N^{(m)}(c) \leqslant \max_{|z|=1}|R_m^N(z)|\,\|c\|_{l^2} \tag{6.5.27}$$

定理 6.16 对于任一正整数 m，存在一个正整数 $N_0 = N_0(m)$，使

$$\max_{|z|=1}|R_m^N(z)| = 2((2m-1)!)\left|\sum_{j=1}^{m-1}\frac{k_j^{(m)}}{1-\lambda_{m,j}}|\lambda_{m,j}|^{N+1}\right| \tag{6.5.28}$$

对于所有 $N \geqslant N_0$ 成立。而且，对于 $m=2,3,4$，$N_0(m)$ 能够选取为 0。

作为上述叙述的两个定理的一个推论，因为对于 $2 \leqslant m \leqslant 4$，公式(6.5.28)中的和项符号交错并且具有单调减的数量，我们具有下述推论。

推论 6.17 对于 $m=2,3,4$ 和任一正整数 N

$$\varepsilon_N^{(m)}(c) \leqslant \sigma_{m-1}^{(m)} |\lambda_{m,m-1}|^{N+1} \| c \|_{l^2} \tag{6.5.29}$$

其中

$$\sigma_j^{(m)} := 2((2m-1)!) \frac{\kappa_j^{(m)}}{1-\lambda_{m,j}} \tag{6.5.30}$$

定理 6.15 的证明 像公式(6.5.12)与(6.5.15)中那样，令 $c=c^J$ 与 $c_N=c_N^J$ 并且用 $\widetilde{C}$ 与 $\widetilde{C}_N$ 分别表示它们的符号，那么，由公式(6.5.14)(6.5.15)与(6.5.9)，有

$$\begin{aligned} \widetilde{C}_N(z) = & \{P(z)G_N(z) + Q(z)H_N(z)\}\widetilde{C}(z) \\ & + \{P(z)G_N(-z) + Q(z)H_N(-z)\}\widetilde{C}(-z) \end{aligned} \tag{6.5.31}$$

其中 P 与 Q 是 m 阶基数 B-样条 N_m 与 B-小波 ψ_m 的两尺度符号。因此，应用恒等公式(5.3.13)，我们有

$$\begin{aligned} \widetilde{C}(z) - \widetilde{C}_N(z) = & \{P(z)[G(z) - G_N(z)] \\ & + Q(z)[H(z) - H_N(z)]\}\widetilde{C}(z) \\ & + \{P(z)[G(-z) - G_N(-z)] \\ & + Q(z)[H(-z) - H_N(-z)]\}\widetilde{C}(-z) \end{aligned} \tag{6.5.32}$$

另一方面，由公式(6.5.7)，(6.5.8)，(6.5.23)，(6.5.25)和(6.5.26)得到

$$R_m^N(z)=1-(2m-1)!F_m(z^2)T_m^N(z^2) \quad (6.5.33)$$

并且在定理5.10(iv)中的恒等式变成

$$(1+z)^{2m}E_{2m-1}(z)-(1-z)^{2m}E_{2m-1}(-z)=2^{2m}zE_{2m-1}(z^2) \quad (6.5.34)$$

因此，应用公式(6.5.33)与(6.5.34)，公式(6.5.32)中的量能够简化为

$$\begin{aligned}\widetilde{C}(z)-\widetilde{C}_N(z)=\frac{z^{-2m+1}}{2^{2m}}\Big\{&\left[(1+z)^{2m}E_{2m-1}(z)\right. \quad (6.5.35)\\&\left.-(1-z)^{2m}E_{2m-1}(-z)\right]\\&\times\left[\frac{1}{(2m-1)!}\frac{1}{F_m(z^2)}-T_m^N(z^2)\right]\widetilde{C}(z)\\&-\left[(1+z)^m(1-z)^mE_{2m-1}(-z)\right.\\&\left.-(1-z)^m(1+z)^mE_{2m-1}(-z)\right]\\&\times\left[\frac{1}{(2m-1)!}\frac{1}{F_m(z^2)}-T_m^N(z^2)\right]\widetilde{C}(-z)\Big\}\\=F_m(z^2)\Big\{&\frac{1}{F_m(z^2)}-(2m-1)!T_m^N(z^2)\Big\}\widetilde{C}(z)\\=R_m^N&(z)\widetilde{C}(z)\end{aligned}$$

论断公式(6.5.27)现在应用 Parseval 恒等公式(2.4.18)由公式(6.5.35)得到。●

定理6.16的证明 引入记号

$$F_{m,j}(z) := \frac{F_m(z)}{(z + \frac{1}{z}) - (\lambda_{m,j} - \frac{1}{\lambda_{m,j}})} \tag{6.5.36}$$

并且注意

$$E'_{2m-1}(\lambda_{m,j}) = \prod_{k \neq j} (\lambda_{m,j} - \lambda_{m,k})$$

由公式(6.5.24),有

$$\frac{1}{\kappa_j^{(m)}} = (2m-1)!\, F_{m,j}(\lambda_{m,j})(\lambda_{m,j} - \frac{1}{\lambda_{m,j}}) \tag{6.5.37}$$

其次,把公式(6.5.37)代入公式(6.5.26)得到

$$\begin{aligned} R_m^N(z) = & \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\lambda_{m,j}^{N+1} F_m(z^2)}{F_{m,j}(\lambda_{m,j})(\lambda_{m,j} - \frac{1}{\lambda_{m,j}})} \\ & \times \frac{1}{(z^2 + \frac{1}{z^2}) - (\lambda_{m,j} + \frac{1}{\lambda_{m,j}})} \\ & \times [(z^{2N} + z^{-2N}) - \lambda_{m,j}^{-1}(z^{2N+2} + z^{-2N-2})] \\ = & \sum_{j=1}^{m-1} \frac{F_{m,j}(z^2)}{F_{m,j}(\lambda_{m,j})} \frac{\lambda_{m,j}^{N+1}}{\lambda_{m,j} - \frac{1}{\lambda_{m,j}}} [(z^{2N} + z^{-2N}) \\ & - \lambda_{m,j}^{-1}(z^{2N+2} + z^{-2N-2})] \end{aligned} \tag{6.5.38}$$

另一方面,设 $z := e^{-i\omega/2}$,公式(6.5.36)中定义的表示式 $F_{m,j}$ 能够写为

$$F_{m,j}(z^2) = F_{m,j}(e^{-i\omega}) = \sum_{l=0}^{m-2} b_{m,j,l} \cos l\omega \tag{6.5.39}$$

因此，公式(6.5.38)中的公式变为

$$R_m^N(z)=2\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{l=0}^{m-2}\frac{\lambda_{m,j}^{N+1}b_{m,j,l}}{F_{m,j}(\lambda_{m,j})\left(\lambda_{m,j}-\dfrac{1}{\lambda_{m,j}}\right)} \tag{6.5.40}$$

$$\times\cos l\omega\left[\cos N\omega+\frac{1}{|\lambda_{m,j}|}\cos(N+1)\omega\right]$$

因为 $0<|\lambda_{m,1}|<\cdots<|\lambda_{m,m-1}|<1$，很明显，

$$\lambda_{m,m-1}-\frac{1}{\lambda_{m,m-1}}=\frac{1}{|\lambda_{m,m-1}|}-|\lambda_{m,m-1}|>0 \tag{6.5.41}$$

所以

$$F_{m,m-1}(\lambda_{m,m-1})=\frac{1}{(2m-1)!}\prod_{j=1}^{m-2}\left[\left(\lambda_{m,m-1}+\frac{1}{\lambda_{m,m-1}}\right)\right.$$

$$\left.-\left(\lambda_{m,j}+\frac{1}{\lambda_{m,j}}\right)\right]>0 \tag{6.5.42}$$

但因为 $F_{m,j}(z)$ 是一个只具有负零点的对称 Laurent 多项式，所以公式(6.5.39)中的系数 $b_{m,j,l}$ 一定是严格正的。这样，由公式(6.5.41)与(6.5.42)得到

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{|\lambda_{m,m-1}|^N}\sum_{j=1}^{m-1}\frac{b_{m,j,l}|\lambda_{m,j}|^N}{F_{m,j}(\lambda_{m,j})\left(\lambda_{m,j}-\dfrac{1}{\lambda_{m,j}}\right)}$$

$$=\frac{b_{m,m-1,l}}{F_{m,m-1}(\lambda_{m,m-1})\left(\lambda_{m,m-1}-\dfrac{1}{\lambda_{m,m-1}}\right)}>0$$

对于所有 $l=0,\cdots,m-2$ 成立；因此，存在一个整数 $N_0=N_0(m)$，使

对于所有 $N \geqslant N_0$

$$\gamma_{m,l}^{(N)} := 2\sum_{j=1}^{m-1} \frac{b_{m,j,l} |\lambda_{m,j}|^N}{F_{m,j}(\lambda_{m,j})(\lambda_{m,j} - \frac{1}{\lambda_{m,j}})} > 0 \tag{6.5.43}$$

对于 $l=0,\cdots,m-2$ 成立。因此，我们看到，对于所有 $N \geqslant N_0$，余弦多项式 $R_m^N(z)$ 能表示为

$$R_m^N(z) = (-1)^{N+1}\sum_{l=0}^{m-2}\{\gamma_{m,l}^{(N+1)}\cos N\omega + \gamma_{m,l}^{(N)}\cos(N+1)\omega\}\cos l\omega$$

该多项式具有正系数(除了对于因子 $(-1)^{N+1}$ 而外)并且满足

$$\max_{|z|=1}|R_m^N(z)| = |R_m^N(1)|, \quad N \geqslant N_0 \tag{6.5.44}$$

所以，因为 $F_m(1) = \sum N_{2m}(j) = 1$，由公式(6.5.44)与(6.5.26)得到

$$\max_{|z|=1}|R_m^N(z)| = |R_m^N(1)| \tag{6.5.45}$$

$$= 2((2m-1)!)\left|\sum_{j=1}^{m-1} \kappa_j^{(m)} \frac{\lambda_{m,j}^{N+1}}{1-\lambda_{m,j}}\right|$$

对于所有 $N \geqslant N_0$ 成立。注意，由于 $\{\lambda_{m,j}^{N+1}\}$ 同号，公式(6.5.45)与(6.5.28)相同。对于 $m=2$，很明显，公式(6.5.45)对于所有 $N \geqslant 0$ 成立，并且只要稍许做点工作就可证明，当 $m=3$ 与 4 时，公式(6.5.28)也对所有 $N \geqslant 0$ 成立。 ●

我们通过叙述线性与三次样条小波结束本节。截断误差有下述上界：

$$\begin{cases} \varepsilon_N^{(2)}(c) \leqslant 2.732\,050\,9 \times (0.267\,950)^{N+1} \| c \|_{l^2} \\ \varepsilon_N^{(4)}(c) \leqslant 7.837\,374\,7 \times (0.535\,280\,5)^{N+1} \| c \|_{l^2} \end{cases} \tag{6.5.46}$$

这些是应用推论 6.17 得到的粗略的估计。比较好的估计，特别是对于小的 N 与 $m=2,3,4$，能够应用公式(6.5.28)得到。

6.6 全正性、完全振荡及零交叉

正如第 4 章中所述，基数 B-样条具有一个很特殊的性质，称为"全正性"。这个性质是使 B-样条级数

$$\sum_k c_k N_m(\cdot - k) \tag{6.6.1}$$

确立最适合"平滑"用途作为唯一工具成为关键组成部分。本节将证明，相应基数 B-小波 ψ_m 具有在某种意义上与全正性相反的一个性质。当一个 B 样条级数"平滑"任何"扰动"数据时，B-小波级数

$$\sum d_k \psi_m(\cdot - k) \tag{6.6.2}$$

可"检测"这样的数据。这两种级数之间的重要区别是，公式(6.6.1)中的级数绝不比它的系数序列$\{c_k\}$振荡得大，而公式(6.6.2)中的级数总是比$\{d_k\}$振荡得大。将会看到，ψ_m 具有一个特殊的性质，称为"完全振荡"，这与它的同伴 N_m 的全正性性质相反。

定义 6.18

(1) 一个矩阵 M(有限，无限，或双无限)称为是"全正的(TP)"，如果通过删除 M 的任意行与列形成的任一 M 的有限维子方阵具有一个非负的行列式。

(2) 一个二元函数 $F(x,y)$称为是一个全正核，如果矩阵

$[F(x_j,y_k)]$是一个全正矩阵，其中$\{x_j\}$与$\{y_k\}$是从 F 的定义域选取的任意增序列。

(3) 具有 $a_0\neq 0$ 的一个序列$\{a_n\}$，$n=0,1,\cdots$，(有限或无限的)，称为是一个全正序列，或者一个 Pólya 频率序列，如果通过设 $a_{-1}=a_{-2}=\cdots=0$ 形成的 Toeplitz 矩阵$[a_{-j+k}]$是一个全正矩阵。

对于基数 B 样条 N_m，把 $N_m(x-k)$作为两变量 $x\in\mathbb{R}$ 与 $k\in\mathbb{Z}$ 的一个函数。这样，就说 N_m 是全正的，这是指，对于任一正整数 n 和任何序列$\{x_j\}$与$\{l_j\}$，而且

$$\begin{cases} x_1<\cdots<x_n & x_j\in\mathbb{R} \\ l_1<\cdots<l_n & l_j\in\mathbb{Z} \end{cases} \tag{6.6.3}$$

我们有

$$\det[N_m(x_j-l_k)]\geqslant 0 \tag{6.6.4}$$

证明关于基数 B-样条的这个重要事实不包括在本书中，但是，我们要指出作为公式(6.6.4)的一个推论，序列

$$\{N_{2m}(j+1)\},\quad j=0,1,\cdots \tag{6.6.5}$$

是一个 Pólya 频率序列。实际上，选择 $x_j=j+1$ 与 $l_k=k$，其中 $j,k\in\mathbb{Z}_+$，可看到，矩阵$[N_{2m}(x_j-l_k)]=[N_{2m}(j+1-k)]$的转置与公式(6.6.5)第一行给出的上三角 Toeplitz 矩阵相同。注意公式(6.6.5)是序列的符号也是有意义的，因为 Euler-Frobenius 多项式 E_{2m-1} 的 $1/(2m-1)!$ 倍，它能够写为

$$\sum_{j=0}^{\infty}N_{2m}(j+1)z^j=\frac{1}{(2m-1)!}\prod_{j=1}^{2m-2}(z+|\lambda_{m,j}|) \tag{6.6.6}$$

因为 $\lambda_{m,j}<0$，$j=1,\cdots,2m-2$(见公式(6.4.16))。这个结果能够推

广到任何 Pólya 频率序列如下。

引理 6.19 令$\{a_j\}$，$j\in \mathbb{Z}_+$，是满足 $a_0\neq 0$ 的 l^2 中的一个序列。那么$\{a_j\}$是一个 Pólya 频率序列如且仅如它的符号写为

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j = a_0 e^{\gamma z} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1+\alpha_j z}{1-\beta_j z} \tag{6.6.7}$$

其中 $\gamma, \alpha_j, \beta_j \geqslant 0$ 且

$$\sum_{j=0}^{\infty} (\alpha_j + \beta_j) < \infty$$

例子 6.20 考虑像公式(6.2.6)中给出的 m 阶基数 B-小波 ψ_m 的两尺度序列$\{q_k\}$。更一般地说，对于每个 $r=0,\cdots,m-1$，考虑序列$\{q_{m,k}^{(r)}\}$，它控制用公式(6.3.6)定义的它的 r 阶导数 $\psi_m^{(r)}$。$\{q_{m,k}^{(r)}\}$的符号在公式(6.3.29)中已经证明了是

$$\begin{aligned}\sum_k q_{m,k}^{(r)} z^k &= \sum_{k=0}^{3m-2+r} q_{m,k}^{(r)} z^k \\ &= \frac{2^{-m+r+1}}{(2m-1)!} E_{2m-1}(-z)(1-z)^{m+r}\end{aligned}$$

因而，$q_{m,k}^{(r)}$，$k=0,\cdots,3m-2+r$，交错变号，并且$\{\tilde{q}_{m,k}^{(r)}\}$，$\tilde{q}_{m,k}^{(r)} := (-1)^k q_{m,k}^{(r)} = |q_{m,k}^{(r)}|$的符号变成

$$\sum_k \tilde{q}_{m,k}^{(r)} z^k = \frac{2^{-m+r+1}}{(2m-1)!} E_{2m-1}(z)(1+z)^{m+r}$$

这是一个只有负零点的多项式。因此，用引理 6.19，$\{\tilde{q}_{m,k}^{(r)}\}$是一个 Pólya频率序列。 ●

回顾定理 6.10，$\{\tilde{q}_{m,k}^{(r)}\}$能够应用线性 Pascal 三角形算法计算。一般来说，有下述结果。

定理 6.21 令 $\mathscr{P}$ 是像公式(6.3.12)定义的一个线性 Pascal 三角形算法，而对于所有 $n\in\mathbb{Z}_+$，$k_L(n), k_R(n)\geq 0$ 和 $b_L(n), b_R(n)>0$。那么，每个 $\mathscr{P}(n)$ 是一个 Pólya 频率序列。

Pólya 频率序列和一般全正核的一个重要性质是它们所谓的"变缩"性质。这是在"振荡"意义上的一个"平滑"效果，作为一个序列或函数的变号数，当它与 Polya 频率序列求卷积或与全正核求积分时，逐渐变小。

定义 6.22 一个有限实数序列 a 的强(或者实际)的变号数是在删去所有零项以后 a 的变号次数，表示为 $S^-(a)$。这个序列 a 的强和弱的变号数是当序列的每个(内部的)零项看作是正的或负的以给出最大变号数时变号的次数，表示为 $S^+(a)$。(注：当考虑一个有限序列时，序列的第一项和最后一项假定是非零的。)具有 $\operatorname{supp}f=[a,b]$ 的连续函数 f 的强变号数定义为

$$S^-(f) = \sup\{S^-(\{f(x_0),\cdots,f(x_n)\}) : a< x_0<\cdots<x_n<b, n\in\mathbb{Z}_+\} \tag{6.6.8}$$

并且相同 f 的强和弱的变号数定义为

$$S^+(f) = \sup\{S^+(\{f(x_0),\cdots,f(x_n)\}) : a< x_0<\cdots<x_n<b, n\in\mathbb{Z}_+\} \tag{6.6.9}$$

附注 在考虑计算 $S^+(f)$时，感兴趣的只是这些 f，它的支撑不包括使 $f=0$ 的非平凡区间；也就是说，假定$\overline{Z^c(f)}=\operatorname{supp}f$，其中

$$\overline{Z^c(f)} = \{x : f(x)\neq 0\} \text{的闭包} \tag{6.6.10}$$

否则，计算 $S^+(f)$ 将在 $\operatorname{supp}f$ 的每个分量上考虑。

下述基数 B-样条的变缩性质能够应用全正性性质建立。

定理 6.23 令 $m\geq 2$ 是任一正整数。那么

$$S^-\left(\sum_{k=0}^{n} a_k N_m(\cdot - k)\right) \leqslant S^-(\{a_k\}), \quad a_0, a_n \neq 0$$
(6.6.11)

就相应的 B-小波 ψ_m 而论，我们将看到，代替可能减少的变号数，一个 B-小波级数通常总是振荡得比它的系数序列大。ψ_m 的“完全振荡”的这个性质与 N_m 的全正性相反，它使 ψ_m 在应用于不规则事物，如奇特的事物，的定位与测量方面是有用的。

定理 6.24 令 $m \geqslant 2$ 和 $d_0, d_n \neq 0$。那么

$$S^-\left(\sum_{k=0}^{n} d_k \psi_m(\cdot - k)\right) \geqslant n + 3m - 2$$

$$\geqslant S^-(\{d_k\}) + 3m - 2 \quad (6.6.12)$$

当一个小波级数的这些零点也算作变号时，人们期望一个较大的下界。在这个方向上，对于线性 B-小波级数有下述有效的结果。

定理 6.25 令 $d_0, d_n \neq 0$，那么

$$S^+\left(\sum_{k=0}^{n} d_k \psi_2(\cdot - k)\right) \geqslant 2n + 4 - S^-(\{d_k\}) \quad (6.6.13)$$

而且，如果这个 B-小波级数的支撑是一个区间并且如果 $S^-(\{d_k\}) = 0$，那么

$$S^+\left(\sum_{k=0}^{n} d_k \psi_2(\cdot - k)\right) = 2n + 4 \qquad (6.6.14)$$

附注 公式(6.6.14)中的结果证明，“完全振荡”的术语是合理的。

定理 6.24 的证明 回顾 6.1 节中定理 6.3，(小波)空间 W_0^m 通过 m 阶微分算子 D^m 能与 V_1^{2m} 的(多分辨)子空间 $V_1^{2m,0}$ 等同。

然而，不考虑在那里的关系 $\psi_{I,m} = D^m \psi_{2m}$，我们引入$(2m)$阶基数样条

$$\psi_{2m}^{*}(x) = \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{j=0}^{2m-2}(-1)^{j}N_{2m}(j+1)N_{2m}(2x-j)$$

(6.6.15)

它属于 $V_1^{2m,0}$。容易验证

$$\{\Psi_{2m}^{*}(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$$

是 $V_1^{2m,0}$ 的一个 Riesz 基。而且，类似于关系 $D^m\Psi_{2m} = \psi_{I,m}$，我们还有

$$D\Psi_{2m}^{*} = \psi_m$$

事实上，应用定理 4.3 的(vii)m 次就得到

$$\begin{aligned}(D^m\Psi_{2m}^{*})(x) &= \frac{1}{2^{m-1}}\sum_{j=0}^{2m-2}(-1)^{j}N_{2m}(j+1)N_{2m}^{(m)}(2x-j) \\ &= \frac{1}{2^{m-1}}\sum_{j=0}^{2m-2}(-1)^{j}N_{2m}(j+1)\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} N_m(2x-j-k) \\ &= \sum_{l=0}^{3m-2}\left\{\frac{(-1)^{l}}{2^{m-1}}\sum_{k=0}^{m}\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} N_{2m}(l-k+1)\right\} \\ &\quad \times N_m(2x-l) \\ &= \sum_{l=0}^{3m-2} q_l N_m(2x-l) = \psi_m(x)\end{aligned}$$

因此，可以使用 Ψ_{2m}^{*} 代替定理 6.3 中的 Ψ_{2m}。现在，考虑样条序列

$$G(x) = \sum_{k=0}^{n} d_k \Psi_{2m}^{*}(x-k)$$

因为 $d_0, d_n \neq 0$ 并且 $\operatorname{supp}\Psi_{2m}^{*}=[0,2m-1]$，可看到

$$\operatorname{supp}G = [0, n + 2m - 1] \tag{6.6.16}$$

因此，由事实

$$\begin{cases} G(k) = 0, & k \in \mathbb{Z} \\ G^{(l)}(0) = G^{(l)}(n + 2m - 1) = 0, & l = 0, \cdots, 2m - 2 \end{cases} \tag{6.6.17}$$

得到满足

$$\begin{cases} 0 < x_1^{(1)} < 1 < x_2^{(1)} < 2 < \cdots < n + 2m - 2 \\ \qquad < x_{n+2m-1}^{(1)} < n + 2m - 1 \\ 0 < x_1^{(2)} < x_1^{(1)} < x_2^{(2)} \\ \qquad < x_2^{(1)} < \cdots < x_{n+2m-1}^{(1)} < x_{n+2m}^{(2)} < n + 2m - 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 < x_1^{(m)} < x_1^{(m-1)} < x_2^{(m)} < x_2^{(m-1)} < \cdots < x_{n+3m-3}^{(m-1)} \\ \qquad < x_{n+3m-2}^{(m)} < n + 2m - 1 \end{cases} \tag{6.6.18}$$

的一族点 $\{x_j^{(l)}\}$，$j=1,\cdots,n+2m+l-2$ 和 $l=1,\cdots,m$，存在，使 $G^{(l)}$ 在每个 $x_j^{(l)}$ 有一个(强)变号，$j=1,\cdots,n+2m+l-2$。特别是

$$G^{(m)}(x) \doteq \sum_{k=0}^{n} d_k \psi_m(x - k)$$

在每个 $x_1^{(m)},\cdots,x_{n+3m-2}^{(m)}$ 上具有一个(强)变号。 ●

定理 6.25 的证明 为研究更精确的计算 S^+，需要来自全正矩阵的一个结果，即：如果 A 是任一 $p\times(n+1)$ 全正矩阵而且 $p>n$，那么，对于任一实数 $(n+1)$ 维向量

$$S^-(Av) \leqslant \min(n, S^-(v)) = S^-(v) \tag{6.6.19}$$

这个事实实际上是建立定理 6.23 的关键成分。另外，如果 $v=(v_0,\cdots,v_n)$ 与 $\tilde{v}:=(v_0,-v_1,v_2,\cdots,(-1)^n v_n)$，于是很容易验证

$$S^+(v)+S^-(\tilde{v})\geqslant n \qquad (6.6.20)$$

为了建立公式(6.6.13)，需要矩阵

$$A:=\left[(-1)^{j-2k+1}\psi_2\left(\frac{j-2k+2}{2}\right)\right] \qquad (6.6.21)$$

$$=\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 6 & & & \\ 10 & 1 & & \\ 6 & 6 & & \\ 1 & 10 & & \\ & 6 & \cdots & \\ & 1 & & 1 \\ & & & 6 \\ & & & 10 \\ & & & 6 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

还容易证明，这个 $(2n+5)\times(n+1)$ 矩阵 A 是一个全正矩阵。因此，把公式(6.6.19)与(6.6.20)应用到向量 $v=(v_0,\cdots,v_{2n+4})$ 而

$$v_j:=\sum_{k=0}^{n}d_k\psi_2\left(\frac{j-1}{2}-k\right)$$

就有

$$S^+(v)\geqslant 2n+4-S^-(\tilde{v})\geqslant 2n+4-S^-(\{d_k\})$$

这就建立了公式(6.6.13)。

其次，通过使用 ψ_2 与 N_2 的两尺度关系，基数 B 小波级数 $\sum d_k\psi_2(\cdot-k)$ 能够借助于 $N_2(2\cdot-k)$ 写为一个基数 B-样条级数。因为这个级数的支撑是一个区间，再应用关于基数 B-样条全正性的另一个结果，我们有

$$S^+\Big(\sum_{k=0}^{n} d_k\psi_2(\cdot-k)\Big)\leqslant 2n-4 \tag{6.6.22}$$

因此，当 $S^-(\{d_k\})=0$ 时，由公式(6.6.13)与(6.6.22)得到公式(6.6.14)。 ●

在应用中，关于 B-小波级数振荡的精确程度是相当重要的。例如，一个受"Nyquist 速率"控制的带通带限信号的零点分布，只要满足某些条件它就能够完全由其孤立的零点(称为"零交叉")恢复。当一个基数 B-小波级数处理为一个带通信号时，然而，它不可能是带限的，因为它不同于一个指数型的整函数。而且，当使用线性 B-小波时，我们仍然有下述定理。高阶基数 B-小波类似的结果用此写法是不适用的。

定理 6.26 令

$$\begin{cases} f(x)=\sum_{j=0}^{n} d_j\psi_2(x-j) \\ g(x)=\sum_{j=0}^{n} c_j\psi_2(x-j) \end{cases}$$

是具有 $\bar{Z}^c(f)=\bar{Z}^c(g)=[0,n+3]$ 的两个线性样条小波级数，使 $S^-(c)=0$ 且 g 只有简单零点。那么，如果 f 与 g 具有相同的零点，f 必定是 g 的常数倍。

证明 由假设，有 $d_0d_n\neq0$ 和 $c_0c_n\neq0$。选取 c 使 $c_0=cd_0$，那么

$$(g-cf)(x)=\sum_{j=1}^{n}(c_j-cd_j)\psi_2(x-j)$$

假定 $g-cf$ 不恒为零，不失其一般性，我们可假定 $\overline{Z}^c(g-cf)=[1,n+3]$。因为$(g-cf)\in V_1^2$，那么应用所谓的 Budan-Fourier 定理断定，在开区间$(1,n+3)$中 $g-cf$ 的零点 $Z(g-cf)$的数目，包括计算重数在内，不超过 $2n+2$ 个，即：

$$Z(g-cf)\leqslant 2n+2 \tag{6.6.23}$$

另一方面，因为 g 局限于$(0,1]$是 ψ_2 的常数倍，它在$(0,1]$只具有一个简单零点。因此，由定理 6.25 得到

$$\begin{aligned}S^+(g)|_{(1,n+3)}&=S^+(g)|_{(0,n+3)}-1\\&\geqslant 2n+4-S^-(c)-1\\&=2n+3\end{aligned} \tag{6.6.24}$$

另外，因为 g 只具简单零点并且 f 具有和 g 相同的零点，我们有

$$Z(g)|_{(1,n+3)}\leqslant Z(g-cf) \tag{6.6.25}$$

所以，由公式(6.6.23)-(6.6.25)，我们得到

$$\begin{aligned}2n+3&\leqslant S^+(g)|_{(1,n+3)}\\&\leqslant Z(g)|_{(1,n+3)}\leqslant Z(g-cf)\leqslant 2n+2\end{aligned}$$

这是荒谬的。这就完成了定理的证明。 ●

第七章　正交小波和小波包

由于明显的原因，正交基是 Hilbert 空间最理想的基底。特别是，如果 $L^2(\mathbb{R})$的一个正交基用某个 $\mathscr{R}$ 函数 ψ 生成，那么 ψ 是自对偶的，ψ 已经是一个小波。而且，关于尺度函数ϕ的 ψ 的两尺度序列$\{q_n\}$可由ϕ的两尺度序列$\{p_n\}$简单地得到：通过复共轭，再加上符号的交错和沿一个单位位移方向的反转。例如，像在(5.6.14)中那样，我们可以设

$$q_n = (-1)^n \bar{p}_{-n+1}$$

换句话说，本质上只是一个两尺度序列控制多分辨分析和其相应的小波分解。更有意义的是，应用$\{p_n\}$与$\{q_n\}$的一种混合产生 ψ 的两尺度关系，这个小波空间 W_n 就能够进一步正交分解。这样产生的新的正交基函数的族称为"小波包"。本章致力于正交小波和它们的小波包的分析与构造。特别是，将讨论紧支撑正交小波的构造。

7.1　正交小波的例子

小波和它们对偶的一般结构已经在 5.4 节中所研究过了，其中提出的策略是从两个互相对偶的容许两尺度符号 $P=P_\phi$ 与 $G^*=G_\phi^\#$ 出发。对于我们在 5.6 节中看到的正交小波的构造，ϕ还必须是自对偶的，所以 $G^*=P$ 和对偶关系公式(5.4.7)变成

$$|P(z)|^2+|P(-z)|^2=1, \quad |z|=1 \qquad (7.1.1)$$

另外，根据定理 5.19，关于尺度函数ϕ的正交小波 ψ 两尺度符号的一般公式用

$$c_0 z^{2n_0-1}\overline{P(-z)}, \quad |z|=1 \qquad (7.1.2)$$

给出，其中 $c_0=\pm 1$ 而 n_0 是一个任意整数。为了和公式(5.6.13)与(5.6.14)中的选择一致，我们设 $c_0=-1$ 及 $n_0=1$，所以

$$Q(z)=-z\overline{P(-z)}, \quad |z|=1 \qquad (7.1.3)$$

因此，为构造一个正交小波 ψ，必须研究两尺度关系

$$\begin{cases} \hat{\phi}(\omega)=P(e^{-i\omega/2})\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) \\ \hat{\psi}(\omega)=Q(e^{-i\omega/2})\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) \end{cases} \qquad (7.1.4)$$

当然，如果$\hat{\phi}$或者 P 是已知的，那么 $\hat{\psi}$，继而 ψ，应用在公式(7.1.4)中第二个关系和公式(7.1.3)确定。

例子 7.1 令 m 是任一正整数并令 N_m 表示 m 阶基数 B-样条，那么用定理 3.23(还可见公式(3.6.18))，Fourier 变换用

$$\hat{\phi}_m(\omega)=\frac{\hat{N}_m(\omega)}{\left(\sum_k|\hat{N}_m(\omega+2\pi k)|^2\right)^{1/2}}
=\frac{e^{-\frac{im\omega}{2}}\left(\frac{\sin\omega/2}{\omega/2}\right)^m}{(F_m(e^{-i\omega}))^{1/2}} \qquad (7.1.5)$$

给出的尺度函数ϕ_m是一个正交尺度函数，在$\{\phi_m(\cdot-k): k\in\mathbb{Z}\}$是 V_0^m 的一个正交基的意义上。这里，F_m 像在公式(6.1.13)中定义的

那样是关于 N_m 的广义 Euler-Frobenius Laurent 多项式，并且 F_m 的结构已经在 6.4 节中讨论过了（见公式(6.1.13)与定理 6.13)。因此，通过应用公式(7.1.3)--(7.1.5)，可以看到生成 $\{W_j^m\}$ 的正交小波 ψ 的 Fourier 变换 $\hat{\psi}$ 是

$$\hat{\psi}(\omega) = -e^{-i\omega/2}\,\overline{P(e^{-i(\omega+2\pi)/2})}\,\hat{\phi}_m\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{7.1.6}$$

$$= -\frac{e^{-i\omega/2}\,\overline{\hat{\phi}_m(\omega+2\pi)}\,\hat{\phi}_m\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\overline{\hat{\phi}_m\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}}$$

$$= -\left(\frac{4}{i\omega}\right)^m e^{-\frac{i\omega}{2}}\sin^{2m}\left(\frac{\omega}{4}\right)\left[\frac{F_m(-z)}{F_m(z^2)F_m(z)}\right]^{1/2}$$

其中 $z=e^{-i\omega/2}$。对于 $m=1$，容易看到，用公式(7.1.6)给出的小波 ψ 只不过是 Haar 函数 ψ_H。 ●

当然，如果我们已经有一个半正交小波，那么公式(3.6.18)中的规范正交化过程公式很容易得到一个正交小波。

例子 7.2 令 ψ 是在前章中引入的半正交基数样条小波 $\psi_{I,m}$、ψ_m 或 $\tilde{\psi}_m$ 之一。那么 $\psi^{\perp}$ 是一个正交小波，它的 Fourier 变换用公式(3.6.18)给出。对于 $\psi=\psi_{I,m}$，ψ_m 或 $\tilde{\psi}_m$，第六章中得到的结果可容易地用于确定 Laurent 级数

$$\sum_k |\hat{\psi}(\omega+2\pi k)|^2$$

（见公式(6.1.11)～(6.1.13)，(6.2.5)及(6.2.9)。）

通常，因为不了解任何尺度函数 ϕ 或它的两尺度符号 $P=P_\phi$，所以必须很努力地工作以便提供它们之中的任一个。回忆我们构造 P 的策略，并在下两节中我们将致力于这种努力。为了结束本

节，首先给出构造ϕ，而不是 P 的一个例子。

例子 7.3 令 $0<\varepsilon\leqslant\frac{\pi}{3}$，$0<A<1<B<\infty$，并且 N 是一个任意的正整数。选择满足下述条件

$$\begin{cases}\operatorname{supp}\hat{\eta}=[-\pi-\varepsilon,\pi+\varepsilon]\\ \hat{\eta}(\omega)=1 \quad 对于\ |\omega|\leqslant\pi-\varepsilon\\ A\leqslant\sum_k|\hat{\eta}(\omega+2\pi k)|^2\leqslant B, \quad \omega\in\mathbb{R}\end{cases} \tag{7.1.7}$$

的任一 $\hat{\eta}\in C^N(\mathbb{R})$。那么我们能够引入一个 Fourier 变换用

$$\hat{\phi}(\omega):=\frac{\hat{\eta}(\omega)}{\left(\sum_k|\hat{\eta}(\omega+2\pi k)|^2\right)^{1/2}} \tag{7.1.8}$$

给出的函数ϕ。很明显，$\hat{\phi}$满足

$$\operatorname{supp}\hat{\phi}=[-\pi-\varepsilon,\pi+\varepsilon] \tag{7.1.9}$$

而且在单位圆上用

$$P(e^{-i\omega})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{\phi}(2\omega+4\pi k) \tag{7.1.10}$$

定义的函数 P 属于 C^N。因此，分部积分 Fourier 级数

$$f(\omega):=P(e^{-i\omega})=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}p_n e^{-in\omega} \tag{7.1.11}$$

N 次，得到

$$p_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\omega)e^{in\omega}d\omega=\left(\frac{i}{n}\right)^N\int_0^{2\pi}f^{(N)}(\omega)e^{in\omega}d\omega$$

所以

$$p_n = O(|n|^{-N}), \quad |n| \to \infty \tag{7.1.12}$$

特别是，我们有 $\{p_n\} \in l^2$。下面证明

$$\hat{\phi}(\omega) = P(e^{-i\omega/2})\,\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}), \quad \omega \in \mathbb{R} \tag{7.1.13}$$

考虑两种独立的情况：

(i) 假定 $\omega \notin \text{supp}\,\hat{\phi}$，那么我们有

$$P(e^{-i\omega/2}) = \sum_{k\neq 0} \hat{\phi}(\omega + 4\pi k)$$

所以无论 $\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) = 0$，还是 $P(e^{-i\omega/2}) = 0$。即，公式(7.1.13)的两边在此情形下都是零。

(ii) 假定 $\omega \in \text{supp}\,\hat{\phi}$。那么可得出下述两个结论。首先，因为 $0 < \varepsilon \leqslant \frac{\pi}{3}$，由此得到对于所有非零整数 k 有 $\hat{\eta}(\frac{\omega}{2} + 2\pi k) = 0$，所以 $\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) = \hat{\eta}(\frac{\omega}{2}) / \hat{\eta}(\frac{\omega}{2}) = 1$。其次，我们有 $P(e^{-i\omega/2}) = \hat{\phi}(\omega)$。因此，公式(7.1.13)的两边都等于 $\hat{\phi}(\omega)$。

由公式(7.1.8)中 $\hat{\phi}$ 的定义，已经知道

$$\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\} \tag{7.1.14}$$

是一个正交族(见定理 3.23)，并且

$$\begin{cases} \hat{\phi}(0) = 1 \\ D^n \hat{\phi}(2\pi k) = 0, \quad 0 \neq k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}_+ \end{cases} \tag{7.1.15}$$

由于 Poisson 求和公式(见公式(2.5.11))，这就推出公式(7.1.14)还是一个单位划分，即：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(x-k) = 1, \quad x \in \mathbb{R} \qquad (7.1.16)$$

因此，为推断ϕ生成 $L^2(\mathbb{R})$的一个 MAR，剩下的问题是证明对于任一 $f \in L^2(\mathbb{R})$，

$$\| P_n(f) - f \|_2 \to 0, \quad n \to \infty \qquad (7.1.17)$$

其中 $P_n(f)$表示 f 在 V_n 上的 $L^2(\mathbb{R})$射影。为此目的，我们必须知道ϕ的衰减速率。这是容易的，分部积分 N 次就得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}^{(N)}(\omega) e^{ix\omega} d\omega = (-ix)^N \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\omega) e^{ix\omega} d\omega$$
$$= 2\pi(-ix)^N \phi(x)$$

这推出

$$\phi(x) = O\left(\frac{1}{1 + |x|^N}\right) \qquad (7.1.18)$$

现在，使用核

$$K(x,y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(x-k) \overline{\phi(y-k)} \qquad (7.1.19)$$

能够把 f 的射影 $P_n(f)$表示为

$$(P_n f)(x) = 2^n \int_{-\infty}^{\infty} K(2^n x, 2^n y) f(y) dy$$

因为公式(7.1.16)隐含

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x,y) dy = 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

可以断定

$$
\begin{aligned}
&\| P_n f - f \|_2 \qquad (7.1.20)\\
&= 2^n \left\| \int_{-\infty}^{\infty} K(2^n \cdot, 2^n y)[f(y) - f(\cdot)]dy \right\|_2\\
&\leqslant \left\| \int_{-\infty}^{\infty} K(2^n \cdot, y)[f(2^{-n}y) - f(\cdot)]dy \right\|_2\\
&\leqslant C \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + |2^n \cdot - y|^N} |f(2^{-n}y) - f(\cdot)| dy \right\|_2
\end{aligned}
$$

其中使用了由公式(7.1.18)得到的估计式：

$$
K(x,y) \leqslant \frac{C}{1 + |x - y|^N} \qquad (7.1.21)
$$

应用广义 Minkowski 不等式(它是公式(2.4.3)的 $L^2(\mathbb{R})$类似不等式，并且能够很容易使用公式(2.1.1)导出)，由公式(7.1.20)，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\| P_n f - f \|_2\\
&\leqslant C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + |y|^N} \| f(\cdot - 2^{-n}y) - f(\cdot) \|_2 dy
\end{aligned}
\qquad (7.1.22)
$$

证明的剩余部分现在是标准的，而且通过把积分分为两部分来完成。首先，对于每个 $\varepsilon>0$，选择 $M>0$ 足够大，使

$$
\int_{|y|\geqslant M} \frac{1}{1 + |y|^N} dy < \varepsilon
$$

然后，因为 $f \in L^2(\mathbb{R})$，对于 $|y| \leqslant M$，就有：当 $n \to \infty$ 时，

$$
\| f(\cdot - 2^{-n}y) - f(\cdot) \|_2 \to 0 \qquad (7.1.23)
$$

一致地成立。这就建立了公式(7.1.17)。 ∎

7.2 正交两尺度符号的识别

尺度函数与小波构造中的技术问题是容许两尺度符号 $P=P_\phi$ 的识别(见定义 5.4,并且回忆我们的策略通常是从一对对偶的两尺度符号 P_ϕ 与 G_ϕ^* 出发)。除在第六章中研究的基数样条小波和在前边讨论的正交小波的三个例子之外,似乎没有任何做法是可用的,除了构造$\hat{\phi}$作为一个无穷积

$$\hat{\phi}(\omega)=\prod_{k=1}^{\infty}P(e^{-i\omega/2^k}) \tag{7.2.1}$$

虽然施加一些条件于这样的无穷乘积的极限函数已经在定理 5.5 与定理 5.6 被验证,但是这些条件既没有直接考虑两尺度符号,也没有考虑它们保证对于ϕ生成一个 MRA 的所有要求。本节只关心某个ϕ的两尺度符号的 Laurent 级数 $P\in\mathscr{W}$ 的研究。因为 P 的完全特征化似乎是不可行的,我们只满足于能容易应用的一个充分条件。我们研究工作的开拓是从引理 5.20 开始的。这里的区别是,特别强调ϕ是一个"正交尺度函数",这个意思是指,ϕ不仅生成 $L^2(\mathbb{R})$的一个 MRA,而且还满足要求

$$<\phi(\cdot-j),\phi(\cdot-k)>=\delta_{j,k},\quad j,k\in\mathbb{Z} \tag{7.2.2}$$

首先由公式(5.1.12)与(7.1.1)回忆任一正交尺度函数ϕ的两尺度符号 P 必须满足的必要条件。

引理 7.4 *令 P 是 Wiener 类 $\mathscr{W}$ 中的一个 Laurent 级数,如果 P 是某个在公式(7.2.2)意义上是正交的尺度函数ϕ的两尺度符号,那么 P 必须满足*

$$P(1)=1 \tag{7.2.3}$$

$$|P(z)|^2+|P(-z)|^2=1,\quad |z|=1 \tag{7.2.4}$$

因此，由于公式(7.2.3)，像在公式(5.1.17)中一样，感兴趣的是，$\mathscr{W}$ 中的这些 P 能够表示为

$$\begin{cases} P(z) = \dfrac{1}{2}\sum_k p_k z^k = \left(\dfrac{1+z}{2}\right)^N S(z) \\ \text{其中 } N \text{ 是某个正整数，并且} \\ S \in \mathscr{W} \text{ 满足 } S(1) = 1 \end{cases} \tag{7.2.5}$$

对于公式(7.2.5)中的任一 S，我们写出

$$\begin{cases} S(z) = \sum_k s_k z^k \\ B := \max\limits_{|z|=1} |S(z)| \end{cases} \tag{7.2.6}$$

本节的目标是要建立关于因子 S 的一个有用条件，以保证 P 是某个正交尺度函数的一个两尺度符号。

定理 7.5 令 $P \in \mathscr{W}$ 对于某个 $N \geqslant 1$ 满足公式(7.2.4)与(7.2.5)，使对于某个 $\varepsilon > 0$

$$\sum_k |s_k| \, |k|^2 < \infty \tag{7.2.7}$$

和

$$B < 2^{N-1} \tag{7.2.8}$$

其中使用了公式(7.2.6)中的记号。于是无穷乘积

$$g(\omega) := \prod_{k=1}^{\infty} P\left(e^{-\frac{i\omega}{2^k}}\right) \tag{7.2.9}$$

处处收敛于 $g \in C(\mathrm{IR}) \cap L^1(\mathrm{IR}) \cap L^2(\mathrm{IR})$。而且，具有 $\hat{\phi} = g$ 的函数 $\phi \in L^2(\mathrm{IR})$ 是生成 $L^2(\mathrm{IR})$ 的一个 MRA 的正交尺度函数。

这个定理的证明与一系列的引理有关。

引理 7.6 对于某个 $N\geqslant 1$，在公式(7.2.7)与(7.2.5)的假设下公式(7.2.9)中的无穷乘积处处收敛于一个连续函数 g。

附注 这个引理不同于定理 5.5，因为这里的假设是用 S 而不是公式(5.1.18)中的有限积。

证明 由公式(7.2.7)和关系公式(7.2.5)，容易看到 $\{p_k\}$ 也满足

$$\sum_k |p_k| |k|^\varepsilon < \infty$$

并且由公式(7.2.10)得到，对于任何 $h>0$，

$$\begin{aligned} &|P(e^{-i(\omega+h)}) - P(e^{-i\omega})| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\sum_k |p_k| |e^{-ikh} - 1| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\sum_k |p_k| \min(2, |k| h) \\ &\leqslant |h|^\varepsilon \sum_k |p_k| |k|^\varepsilon \end{aligned}$$

(这儿，不失其一般性，我们考虑 $0<\varepsilon\leqslant 1$)因此，作为 ω 的一个函数，$P(e^{-i\omega})$ 属于类 $\mathrm{Lip}\,\varepsilon$(见定义 5.7)。另外，根据导出公式(5.1.21)的同样的推导，和那里的结论(除了 S 用 P 代替而 α 用 ε 代替外)，可以断定，公式(7.2.9)中的无穷乘积收敛。为证明极限函数 g 在每个 ω_0 是连续的，首先假定 $g(\omega_0)\neq 0$。在这个假定之下，我们有

$$\begin{aligned} &g(\omega) - g(\omega_0) \\ &\quad = g(\omega_0)\left\{\frac{g(\omega)}{g(\omega_0)} - 1\right\} \\ &\quad = g(\omega_0)\left\{\exp\left[\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left[1 - \left\{\frac{1 - P(e^{-i\omega/2^k})}{P(e^{-i\omega_0/2^k})}\right\}\right]\right] - 1\right\} \end{aligned}$$

$$= g(\omega_0)\left\{\exp\left[O\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\omega-\omega_0|^{\varepsilon}}{2^{k\varepsilon}}\right)\right]-1\right\}$$

$$= o(1), \quad \omega \to \omega_0$$

另一方面，如果 $g(\omega_0)=0$，那么因为 $P(1)=1$，存在一个依赖于 ω_0 的充分大的整数 k_0，使极限函数

$$\tilde{g}(\omega) = \prod_{k=k_0}^{\infty} P(e^{-i\omega/2^k})$$

满足 $\tilde{g}(\omega_0)\neq 0$。上述推导已经证明 $\tilde{g}$ 是在 ω_0 的连续函数，所以

$$g(\omega) = \tilde{g}(\omega)\prod_{k=1}^{k_0-1} P(e^{-i\omega/2^k})$$

在 ω_0 也是连续的。 ●

引理 7.7 对于某个 $N\geqslant 1$，在公式(7.2.8)与(7.2.5)的假设之下，公式(7.2.9)中的极限函数 $g(\omega)$ 对于某个 $\eta>0$ 满足

$$|g(\omega)| \leqslant C\left(\frac{1}{1+|\omega|}\right)^{1+\eta}, \quad \omega \in \mathbb{R} \qquad (7.2.11)$$

证明 回到公式(5.1.18)中 b_j 的定义。考虑到公式(7.2.8)，就有

$$b_1 = \log_2 B_1 = \log_2 B < N-1$$

所以，在定理 5.5 中选择 $n_0=1$，定理 5.5 的公式(5.1.20)中的结论就得到公式(7.2.11)，而

$$\eta := N - b_1 - 1$$

●

附注 我们暂停一下，以便总结我们已经证明了些什么，并且给出定理 7.5 证明的剩余部分的一个梗概。

(i) 作为引理 7.6 与 7.7 的一个推论，可看到，在公式(7.2.9)中的无穷乘积处处收敛于某个函数

$$g \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$$

它是无穷乘积本身。因此，用定理 2.17，有一个唯一的$\phi \in L^2(\mathbb{R})$，其 Fourier 变换$\hat{\phi}$就是这个无穷乘积。因此，$\hat{\phi}$满足

$$\begin{cases} \hat{\phi}(\omega) = P(e^{-i\omega/2})\,\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}), & \text{或} \\ \phi(x) = \sum_k p_k\,\phi(2x-k) \end{cases} \tag{7.2.12}$$

所以，像通常那样，可以引入

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\phi(2^jx-k), \quad j,k \in \mathbb{Z} \tag{7.2.13}$$

和

$$V_j = \mathrm{clos}_{L^2(\mathbb{R})} < \phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z} > \tag{7.2.14}$$

用公式(7.2.12)，显然$\{V_j\}$是 $L^2(\mathbb{R})$的闭子空间的一个嵌套序列。为了证明它是 $L^2(\mathbb{R})$的一个 MRA，必须证明 V_j 的并在 $L^2(\mathbb{R})$中是稠密的而且ϕ生成 V_0 的一个 Riesz 基。

(ii) 首先证明ϕ生成 V_0 的一个正交基。为了证明$V_j, j\in\mathbb{Z}$的并的稠密性，我们使用在第一、三章中讨论的相同的方法，通过构造$L^2(\mathbb{R})$的一个正交小波基。这不仅推出

$$\mathrm{clos}_{L^2(\mathbb{R})}(\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j) = L^2(\mathbb{R}) \tag{7.2.15}$$

而且还有

$$\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\} \tag{7.2.16}$$

(见引理 5.1)。根据 5.6 节的研究，已经知道，一个正交小波的一

个好的选择是

$$\psi(x) := \sum_{k\in \mathbb{Z}} q_k \phi(2x-k) \qquad (7.2.17)$$

其中

$$q_k := (-1)^k \bar{p}_{-k+1} \qquad (7.2.18)$$

还有，像通常的一样，设

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k), \quad j,k \in \mathbb{Z} \qquad (7.2.19)$$

那么，只要证明了族

$$\{\psi_{j,k} : j,k \in \mathbb{Z}\} \qquad (7.2.20)$$

是 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个正交基，定理 7.5 的证明就完成了。

为了证明 ϕ 生成 V_0 的一个正交基（因此，是一个 Riesz 基），我们由定理 3.23 可知，这等价于证明

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ij\omega} |\hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega = \delta_{j,0}, \quad j \in \mathbb{Z} \qquad (7.2.21)$$

引理 7.8 在定理 7.5 中叙述的假设下，无穷乘积 $g=\hat{\phi}$ 满足公式 (7.2.21)。

证明 这个引理的证明类似于定理 5.22 一个方向的证明。事实上，设

$$g_n(\omega) := \left\{\prod_{k=1}^{n} P(e^{-i\omega/2^k})\right\}\chi_{[-2^n\pi, 2^n\pi)}(\omega) \qquad (7.2.22)$$

我们有

$$I_n := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ij\omega} |g_n(\omega)|^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-2^n\pi}^{2^n\pi}\left\{\prod_{k=1}^{n}|P(e^{-i\omega/2^k})|^2\right\}e^{ij\omega}d\omega$$

这与用 $\bar{P}$ 代替 G 的公式(5.4.22)相同。因此，由公式(5.4.25)，我们得到

$$I_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ij\omega}|g_n(\omega)|^2d\omega = \delta_{j,0}, \quad j \in \mathbb{Z} \qquad (7.2.23)$$

再次应用引理 5.20，有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ij\omega}|\hat{\phi}(\omega)|^2d\omega = \lim_{n\to\infty}I_n = \delta_{j,0}$$

对于所有 $j \in \mathbb{Z}$ 成立。 ●

为了证明公式(7.2.20)中的族是 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个正交基，知道序列 $\{p_k\}$ 与 $\{q_k\}$ 的性质是有帮助的，这里 $\{p_k\}$ 与 $\{q_k\}$ 的关系用公式(7.2.18)给出。

引理 7.9 令 $\{p_k\}$ 与 $\{q_k\}$ 用公式(7.2.5)与(7.2.18)定义，其中 P 满足公式(7.2.3)与(7.2.4)。那么这两个序列具有下述性质：

(i) $$\sum_k p_k = 2$$

(ii) $$\sum_k p_{k-2l}\bar{p}_{k-2m} = 2\delta_{l,m}$$

(iii) $$\sum_k q_{k-2l}\bar{q}_{k-2m} = 2\delta_{l,m}$$

(iv) $$\sum_k p_{k-2l}\bar{q}_{k-2m} = 0$$

(v) $$\sum_k \{p_{l-2k}\bar{p}_{m-2k} - q_{l-2k}\bar{q}_{m-2k}\} = 2\delta_{l,m}$$

对所有 $l,m \in \mathbb{Z}$ 成立。

证明 论断(i)等价于公式(7.2.3)；论断(ii)等价于公式(7.2.4)；考虑到公式(7.2.18)，(iii)是(ii)的一个平凡的推论。有意义的是

“正交性”性质(iv)能够很容易用指标的一个简单变换导出。实际上，我们有

$$\begin{aligned}\sum_k p_{k-2l}\bar{q}_{k-2m} &= \sum_k (-1)^k p_{k-2l}p_{-k+2m+1} \\ &= \sum_j (-1)^{j+1} p_{-j+2m+1}p_{j-2l} \\ &= -\sum_k p_{k-2l}\bar{q}_{k-2m}\end{aligned}$$

最后，为验证(v)，我们看到，应用公式(7.2.18)改变多个 q 与 p 值之后，(v)中的两个和简单地由(ii)中的部分的和组成，其中的一部分是奇指标而另一部分是偶指标。●

作为在上述引理中恒等式(v)的一个推论，有下述引理。

引理 7.10 对于所有 $x\in\mathbb{R}$，

$$2\phi(2x-m) = \sum_k \{p_{m-2k}\phi(x-k) + \bar{q}_{m-2k}\psi(x-k)\}, \quad m\in\mathbb{Z} \tag{7.2.24}$$

证明 只应用公式(7.2.12)、(7.2.17)和引理 7.9 中的(v)即可。●

下述分解公式是有用的。

引理 7.11 对于每个 $f\in L^2(\mathbb{R})$，

$$\begin{aligned}\sum_k |\langle f,\phi_{j,k}\rangle|^2 = \sum_k \{&|\langle f,\phi_{j-1,k}\rangle|^2 \\ &+ |\langle f,\psi_{j-1,k}\rangle|^2\},\end{aligned} \quad j\in\mathbb{Z} \tag{7.2.25}$$

证明 只应用引理 7.10 和引理 7.9 的(ii)，(iii)与(iv)即可。●

除了它们在引理 7.10 与 7.11 中已叙述的好的“分解”性质之

外，这两个族$\{\phi_{j,k}\}$与$\{\psi_{j,k}\}$还具有下述所期望的正交性质。

引理 7.12 在定理 7.5 中叙述的假设下，这两个族$\{\phi_{j,k}\}$与$\{\psi_{j,k}\}$满足下述：

(i) $\langle\phi_{j,k},\phi_{j,l}\rangle=\delta_{k,l}$, $\quad j,k,l\in\mathbb{Z}$

(ii) $\langle\phi_{j,k},\psi_{j,l}\rangle=0$, $\quad j,k,l\in\mathbb{Z}$

(iii) $\langle\psi_{j,k},\psi_{l,m}\rangle=\delta_{j,l}\delta_{k,m}$, $\quad j,k,l,m\in\mathbb{Z}$

证明 论断(i)由引理 7.8，应用定理 3.23 和一个尺度变换得到。为证明(ii)，我们简单地应用(i)，公式(7.2.12)，(7.2.17)以及引理 7.9(iv)。除了在引理 7.9 中用(iii)代替(iv)而外，应用同样的推导可得到 $j=l$ 情形的(iii)中的论断。对于 $j\neq l$，比如说 $j>l$，由公式(7.2.17)我们注意到 $\psi_{l,m}\in V_{l+1}$。因为 $V_{l+1}\subset V_j$，而且通过(ii) $\psi_{j,k}$ 正交于 V_j，我们就得到 $\psi_{j,k}$ 正交于 $\psi_{l,m}$。 ●

因此，$\{\psi_{j,k}\}$是 $L^2(\mathbb{R})$中的一个正交族。正如前边附注提到的那样，表明 V_j 的并在 $L^2(\mathbb{R})$中的稠密性的方法是，证明这个族是 $L^2(\mathbb{R})$的一个正交基。在调合分析中，标准过程是要导出对于$\{\psi_{j,k}\}$的"Parseval 恒等式"。这个就是在下述引理中将要建立的公式。首先注意，任何正交族满足"Bessel 不等式"。这个简单事实的证明是完全与对于(三角)Fourier 级数的 Bessel 不等式的证明相同(见定理 2.18)。

引理 7.13 在定理 7.5 中叙述的假设下，公式(7.2.18)与(7.2.19)定义的正交族$\{\psi_{j,k}\}$，$j,k\in\mathbb{Z}$，满足下述"Parseval 恒等式"：

$$\sum_{j,k\in\mathbb{Z}}|\langle f,\psi_{j,k}\rangle|^2\leqslant\|f\|_2^2,\quad f\in L^2(\mathbb{R}) \tag{7.2.26}$$

证明 让 C_0^∞ 表示具有紧支撑且是无限可微的所有函数的函数类。我们首先对所有 $f\in C_0^\infty$ 建立公式(7.2.26)。如上所述，因为$\{\phi_{j,k}:k\in\mathbb{Z}\}$对于每个 j 是一个正交族，我们有"Bessel"不等式：

$$\sum_{k\in \mathbb{Z}} |\langle f,\phi_{j,k}\rangle|^2 = \|f\|_2^2 < \infty, \quad j\in \mathbb{Z}$$

现在，对于任何正整数对 L 与 M，通过对引理 7.11 中公式(7.2.25)的两边遍及 $j=-L+1,\cdots,M$ 求和，并且删去公共项，有

$$\sum_{j=-L}^{M-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle f,\psi_{j,k}\rangle|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\{|\langle f,\phi_{M,k}\rangle|^2 - |\langle f,\phi_{-L,k}\rangle|^2\} \tag{7.2.27}$$

首先处理公式(7.2.27)右边的第二项。因为 $f\in C_0^\infty$，存在某个 $K>0$ 使 $\operatorname{supp} f\subset[-K,K]$。现在，用 Schwarz 不等式，有

$$\begin{aligned}|\langle f,\phi_{-L,k}\rangle|^2 &= \left|2^{-L/2}\int_{-K}^{K}\phi(2^{-L}x-k)\overline{f(x)}dx\right|^2\\ &\leqslant\left\{2^{-L}\int_{-K}^{K}|\phi(2^{-L}x-k)|^2dx\right\}\|f\|_2^2\\ &=\left\{\int_{-K/2^L}^{K/2^L}|\phi(y-k)|^2dy\right\}\|f\|_2^2\end{aligned}$$

因此，对于所有充分大的 L，

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle f,\phi_{-L,k}\rangle|^2 \leqslant \|f\|_2^2\int_{B_L}|\phi(y)|^2dy \tag{7.2.28}$$

其中

$$B_L := \bigcup_{k\in \mathbb{Z}}\left[k-\frac{K}{2^L},k+\frac{K}{2^L}\right]$$

因为$\phi \in L^2(\mathbb{R})$并且对于任何$N>0$，当L趋于无穷时，$B_L \cap [-N,N]$的测度趋于零．所以公式(7.2.28)中的不等式得到

$$\lim_{L\to+\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\langle f,\phi_{-L,k}\rangle|^2=0 \tag{7.2.29}$$

(顺便说一下，公式(7.2.29)中的结果表明$\bigcap V_j=\{0\}$；见定义5.2陈述后的附注。)所以，由公式(7.2.27)，我们有

$$\sum_{j=-\infty}^{M-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\langle f,\psi_{j,k}\rangle|^2$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\langle f,\phi_{M,k}\rangle|^2,\quad f\in C_0^{\infty} \tag{7.2.30}$$

为了研究公式(7.2.30)右边的量，首先注意，无论对 Fourier 变换还是对 Fourier 级数，应用 Parseval 恒等式：

$$\sum_k|\langle f,\phi_{M,k}\rangle|^2$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_k|\langle\hat{f},\hat{\phi}_{M,k}\rangle|^2 \tag{7.2.31}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_k 2^M\left|\int_0^{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\hat{f}(2^M(\omega-2\pi m))\right.$$

$$\left.\times\overline{\hat{\phi}(\omega+2\pi m)}e^{ik\omega}d\omega\right|^2$$

$$=\frac{2^M}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big|\sum_{m=-\infty}^{\infty}\hat{f}(2^M(\omega+2\pi m))$$

$$\times\overline{\hat{\phi}(\omega+2\pi m)}\Big|^2d\omega$$

$$
-\frac{2^M}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\sum_{m,l}\hat{f}(2^M(\omega+2\pi m))\overline{\hat{f}(2^M(\omega+2\pi l))}\right.
$$

$$
\left.\times\overline{\hat{\phi}(\omega+2\pi m)}\hat{\phi}(\omega+2\pi l)\right\}d\omega
$$

$$
=\frac{2^M}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(2^M(\omega+2\pi n))\right.
$$

$$
\left.\times\overline{\hat{f}(2^M\omega)}\,\overline{\hat{\phi}(\omega+2\pi n)}\hat{\phi}(\omega)\right\}d\omega
$$

$$
=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\hat{f}(\omega)}\hat{f}(\omega+2\pi l2^M)
$$

$$
\times\overline{\hat{\phi}(2^{-M}\omega+2\pi l)}\hat{\phi}(2^{-M}\omega)d\omega
$$

$$
=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{\phi}(2^{-M}\omega)|^2|\hat{f}(\omega)|^2d\omega+R_M
$$

其中 R_M 定义为 $l\neq 0$ 的和。现在，根据公式(7.2.4)和作为 $P(e^{-i\omega/2^k})$的无穷乘积$\hat{\phi}$的公式，有

$$
|\hat{\phi}(\omega)|\leqslant 1,\quad \omega\in\mathbb{R} \tag{7.2.32}
$$

因此，可得到

$$
|R_M|\leqslant\sum_{l\neq 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(\omega)\hat{f}(\omega+2\pi l2^M)|d\omega \tag{7.2.33}
$$

考虑

$$
F_M(\omega):=\sum_{l\neq 0}|\hat{f}(\omega+2\pi l2^M)| \tag{7.2.34}
$$

因为 $f\in C_0^\infty$，显然$\{F_M(\omega)\}$在 $\mathbb{R}$ 上是一致有界的，并且当 M 趋于无穷时在每一个紧集上一致地收敛于 0。因此，注意 $\hat{f}\in L^1(\mathbb{R})$，容

易看到当 $M \to +\infty$ 时，$R_M \to 0$。

现在回到公式(7.2.31)，首先，由引理 7.6 与 7.7 想到 $\hat{\phi}-g$ 是连续的。另外，用公式(7.2.3)与(7.2.9)，我们有 $\hat{\phi}(0)=1$。因此，使用标准的论证，可以断定

$$\lim_{M\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{\phi}(2^{-M}\omega)|^2|\hat{f}(\omega)|^2d\omega = \frac{1}{2\pi}\|\hat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2 \qquad (7.2.35)$$

所以，由结论 $R_M \to 0$，公式(7.2.35)，(7.2.31)及(7.2.30)，我们有

$$\sum_{j,k\in\mathbb{Z}}|\langle f,\psi_{j,k}\rangle|^2 = \|f\|_2^2, \quad f\in C_0^\infty \qquad (7.2.36)$$

为了扩展公式(7.2.36)到 $L^2(\mathbb{R})$ 的所有函数，使用事实：C_0^∞ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中是稠密的。所以，对于任何一个 $f\in L^2(\mathbb{R})$ 和一个任意的 $\varepsilon>0$，存在某个 $f_0\in C_0^\infty$ 使 $\|f-f_0\|_2<\varepsilon$。因此，用 Bessel 不等式，

$$\|\{\langle f-f_0,\psi_{j,k}\rangle\}\|_{l^2} \leqslant \|f-f_0\|_2 < \varepsilon$$

由此

$$\left|\|\{\langle f,\psi_{j,k}\rangle\}\|_{l^2} - \|\{\langle f_0,\psi_{j,k}\rangle\}\|_{l^2}\right| \leqslant \|\{\langle f-f_0,\psi_{j,k}\rangle\}\|_{l^2} < \varepsilon \qquad (7.2.37)$$

因为还有

$$\left|\|f\|_2 - \|f_0\|_2\right| \leqslant \|f-f_0\|_2 < \varepsilon \qquad (7.2.38)$$

由公式(7.2.36)～(7.2.38)推出公式(7.2.26)成立。 ●

现在很容易建立定理 7.5。

定理 7.5 的证明 在引理 7.13 中已经建立了 Parseval 恒等公式(7.2.26),现在我们使用标准的论证证明(在引理 7.12(iii)中建立的)正交族 $\{\psi_{j,k}\}$ 是 $L^2(\mathrm{IR})$ 的一个正交基。事实上,对于任一 $f\in L^2(\mathrm{IR})$ 与任一有限序列 $\{c_{j,k}\}$,我们有

$$\| f - \sum c_{j,k}\psi_{j,k} \|_2^2 = \| f \|_2^2 - 2\mathrm{Re}\sum \bar{c}_{j,k} < f, \psi_{j,k} > + \sum |c_{j,k}|^2$$

因此,对于 $|j|\leqslant N$ 与 $|k|\leqslant N$ 选择 $c_{j,k}=<f,\psi_{j,k}>$ 并且让 N 趋于无穷,有

$$f = \sum_{j,k} < f, \psi_{j,k} > \psi_{j,k}, \quad f \in L^2(\mathrm{IR})$$

其中收敛是在 $L^2(\mathrm{IR})$ 中的。即,我们证明了 ψ 是一个正交小波。因此,应用引理 5.1,得到公式(7.2.15),所以 ϕ 是一个尺度函数。

●

7.3 紧支撑正交小波的构造

考虑到公式(7.2.18)描述的两尺度序列 $\{p_k\}$ 与 $\{q_k\}$ 之间的关系,为了构造一个正交小波 ψ,只要构造它的相应的正交尺度函数 ϕ 就足够了。本节的目的是要描述构造具有紧支撑的正交尺度函数和小波的一般步骤。为了简便,只考虑实值两尺度序列 $\{p_k\}$。按照定理 7.5 与公式(5.2.13),需要做的所有工作是,使相应于任一给定的正整数 N,验证那些 Laurent 多项式 $S(z)$ 以便满足公式(7.2.4)~(7.2.8)的条件。

更确切地说,令 N 是一个正整数并考虑

$$P(z) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^N S(z) \tag{7.3.1}$$

其中 $S(z)$ 是满足 $S(1)=1$ 的一个 Laurent 多项式。因为任一有限的 Laurent 级数已经满足公式(7.2.7)，只要验证那些 S 满足公式(7.2.4)和

$$B := \max_{|z|=1} |S(z)| < 2^{N-1} \tag{7.3.2}$$

就足够了。为了把施加于 $P(z)$ 的公式(7.2.4)条件转换成直接控制 $S(z)$ 的条件，必须注意，因为 S 是具有实系数的一个 Laurent 多项式，$|S(e^{-i\omega})|^2$ 是一个余弦多项式；因此，可以写出

$$|S(e^{-i\omega})|^2 = \widetilde{R}(\cos\omega) \tag{7.3.3}$$

其中 $\widetilde{R}$ 是某个具有实系数的(代数)多项式。像在公式(5.6.37)中一样，变量替换，即

$$\begin{cases} x = \dfrac{1-\cos\omega}{2} = \sin^2(\dfrac{\omega}{2}) \\ R(x) = \widetilde{R}(\cos\omega) = \widetilde{R}(1-2x) \end{cases} \tag{7.3.4}$$

就把公式(7.2.4)条件转换为

$$\left|\frac{1+e^{-i\omega}}{2}\right|^{2N} |S(e^{-i\omega})|^2 + \left|\frac{1-e^{-i\omega}}{2}\right|^{2N} |S(-e^{-i\omega})|^2 = 1$$

或等价地，

$$(1-x)^N R(x) + x^N R(1-x) = 1 \tag{7.3.5}$$

按照公式(5.6.33)与(5.6.38)，公式(7.3.5)的通解用

$$\begin{cases} R(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} x^k + x^N T(x) \\ \text{其中 } T \text{ 是一个 } T(1-x) = -T(x) \text{ 多项式} \end{cases} \tag{7.3.6}$$

给出。

总结上述研究的结果如下，其中

$$T_0(x) := T\left(\frac{1-2x}{2}\right)$$

引理 7.14 令 S 是满足公式(7.3.2)和对于某个奇多项式 T_0

$$|S(e^{-i\omega})|^2 = \sum_{k=0}^{N-1}\binom{N+k-1}{k}\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{2k}$$

$$+\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{2N}T_0\left(\frac{\cos\omega}{2}\right) \qquad (7.3.7)$$

的任一 Laurent 多项式。那么 Laurent 多项式

$$\left(\frac{1+z}{2}\right)^N S(z) = \frac{1}{2}\sum_k p_k z^k \qquad (7.3.8)$$

其中选取 $S(1)$ 为 1，是生成 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个 MRA 的某个紧支撑正交尺度函数 ϕ 的两尺度符号。因此，

$$\psi(x) := \sum_k (-1)^k \overline{p}_{-k+1}\phi(2x-k) \qquad (7.3.9)$$

是一个紧支撑正交小波。

附注 如果 S 满足公式(7.3.7)，那么令 $\omega=0$，有 $|S(1)|^2=1$。所以，选择 S 满足 $S(1)=1$ 是容易达到的。公式(7.3.7)中所有奇多项式 $R_0(x)$，$|x|\leqslant\frac{1}{2}$，的族给了在正交尺度函数构造中的一些自由。如果选择 $R_0=0$ 不违背公式(7.3.2)，那么相应的尺度函数在用公式(7.3.7)控制的尺度函数中具有最小支撑。下面将看到，公式(7.3.2)中的条件通过选择 $R_0=0$ 的确是满足的。

我们需要下述恒等式。

引理 7.15 对于所有 $k, n\in\mathbb{Z}_+$，

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{n+j}{j}=\binom{n+k+1}{k} \qquad (7.3.10)$$

证明 反复应用恒等式

$$\binom{n+j+1}{j}=\binom{n+j}{j}+\binom{n+j}{j-1}$$

很容易建立这个引理。实际上,我们有

$$\begin{aligned}\binom{n+k+1}{k}&=\binom{n+k}{k}+\binom{n+k}{k-1}\\&=\binom{n+k}{k}+\left\{\binom{n+k-1}{k-1}+\binom{n+k-1}{k-2}\right\}\\&=\cdots=\sum_{j=0}^{k}\binom{n+j}{j}\end{aligned}$$

●

下述结果是引理 7.14 的一个推论。

定理 7.16 令 N 是任一正整数并且 $S(z)$ 是满足

$$|S(e^{-i\omega})|^2=\sum_{j=0}^{N-1}\binom{N+j-1}{j}(\sin\frac{\omega}{2})^{2j} \qquad (7.3.11)$$

使 $S(1)=1$ 的任一具有实系数的 Laurent 多项式。那么,公式(7.3.8)中的 Laurent 多项式是一个紧支撑正交尺度函数 ϕ 的两尺度符号,而公式(7.3.9)定义的 ψ 是一个紧支撑正交小波。

证明 应用公式(7.3.10)并使 $n=k=N-1$,我们有

$$B^2:=\max_{|z|=1}|S(z)|^2\leqslant\sum_{j=0}^{N-1}\binom{N+j-1}{j}$$

$$= \binom{2N-1}{N-1} = \frac{1}{2}\left\{\binom{2N-1}{N-1} + \binom{2N-1}{N}\right\}$$

$$< \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2N-1}\binom{2N-1}{k} = \frac{1}{2}\cdot 2^{2N-1} = 2^{2N-2}$$

所以 $B<2^{N-1}$，而且公式(7.3.2)被满足。 ●

因此，为构造紧支撑正交小波，唯一的技术问题是解公式(7.3.11)求 $S(z)$。称之为 Riesz 引理的下述结果保证 $S(z)$ 总是存在的。我们给出这个结果的一个“构造”证明，以便表明怎样能够导出 $S(z)$。

定理 7.17 令 $a_0,\cdots,a_N\in\mathbb{R}$ 而且 $a_N\neq 0$，使

$$A(\omega) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k\cos k\omega \geqslant 0, \quad \omega\in\mathbb{R} \quad (7.3.12)$$

那么存在具有实系数且精确次数为 N 的一个多项式

$$B(z) = \sum_{k=0}^{N} b_k z^k \quad (7.3.13)$$

满足

$$|B(z)|^2 = A(\omega), \quad z = e^{-i\omega} \quad (7.3.14)$$

证明 对应于余弦多项式 $A(\omega)$，考虑代数多项式

$$P_A(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=-N}^{N} a_{|k|} z^{N+k} \quad (7.3.15)$$

很明显，P_A 满足

$$P_A(z) = z^N A(\omega), \quad z = e^{-i\omega} \quad (7.3.16)$$

和

$$P_A(z) = z^{2N} P_A\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in \mathbb{C} \tag{7.3.17}$$

现在，由假定 $a_N \neq 0$，我们得到 $P_A(0) \neq 0$，并且用公式(7.3.17)，由此可见 P_A 的所有零点以倒数对出现。特别是，单位圆上的零点必定具有偶数重。而且，因为 P_A 的系数是实的，P_A 的所有复数零点也以共轭对出现。即，P_A 能够写为

$$P_A(z) = \frac{1}{2} a_N \left\{ \prod_{k=1}^{K} (z - r_k)(z - r_k^{-1}) \right\} \tag{7.3.18}$$

$$\times \left\{ \prod_{j=1}^{J} (z - z_j)(z - \bar{z}_j)(z - z_j^{-1})(z - \bar{z}_j^{-1}) \right\}$$

其中 $r_1, \cdots, r_K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，$z_1, \cdots, z_J \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$，并且 $K + 2J = N$。因此，由于事实：

$$|(z - z_j)(z - \bar{z}_j^{-1})| = |z_j|^{-1} |z - z_j|^2, \quad z = e^{-i\omega} \tag{7.3.19}$$

应用公式(7.3.12)，(7.3.16)，(7.3.18)以及(7.3.19)，我们有

$$\begin{aligned} A(\omega) &= |A(\omega)| = |P_A(z)| \\ &= \frac{1}{2} |a_N| \prod_{k=1}^{K} |r_k^{-1}| \prod_{j=1}^{J} |z_j|^{-2} \\ &\quad \times \left| \prod_{k=1}^{K} (z - r_k) \prod_{j=1}^{J} (z - z_j)(z - \bar{z}_j) \right|^2 \end{aligned}$$

其中 $z = e^{-i\omega}$。所以，多项式

$$B(z) := \left(\frac{1}{2} |a_N| \prod_{k=1}^{K} |r_k^{-1}| \prod_{j=1}^{J} |z_j|^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{7.3.20}$$

$$\times\left\{\prod_{k=1}^{K}(z-r_k)\prod_{j=1}^{J}(z-z_j)(z-\bar{z}_j)\right\}$$

具有精确次数 $K+2J=N$ 并且满足公式(7.3.14)。 ●

附注 注意到，$B(z)$不是唯一的，因为可以由 $P_A(z)$的每个倒数对零点挑选任一零点以形成 $B(z)$。在应用定理 7.15 或 7.16 时，必须规范化 $B(z)$以便给出 $S(1)=1$。在下述例子中，将选择不位于开单位圆盘中的那些零点，并且注意，规范化常数必须是 -1。

例子 7.18 应用具有 $N=1$ 的定理 7.16 与 7.17，有

$$A(\omega)=|S(e^{-i\omega})|^2=1+2\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{4}{2}-\cos\omega$$

所以公式(7.3.12)中的非零系数是 $a_0=4$ 与 $a_1=-1$。现在，用公式(7.3.15)，我们得到

$$\begin{aligned}P_A(z)&=\frac{1}{2}\{-1+4z-z^2\}\\&=-\frac{1}{2}(z-(2-\sqrt{3}))(z-(2+\sqrt{3}))\end{aligned}$$

如果选择单位圆外面的零点，那么应用公式(7.3.20)，就有

$$\begin{aligned}S(z)&=-B(z) &(7.3.21)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{-1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}(z-(2+\sqrt{3}))\\&=\frac{-1}{\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{3}}(z-(2+\sqrt{3}))\\&=-\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1)z-(\sqrt{3}+1)\}\end{aligned}$$

因此，由于公式(7.3.21)的因子 $S(z)$，两尺度符号用

$$
\begin{aligned}
P(z) &= \left(\frac{1+z}{2}\right)^2 S(z) \qquad (7.3.22)\\
&= \frac{1}{8}(1+z)^2((1-\sqrt{3})z + (1+\sqrt{3}))\\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1+\sqrt{3}}{4} + \frac{3+\sqrt{3}}{4}z\right.\\
&\quad \left. + \frac{3-\sqrt{3}}{4}z^2 + \frac{1-\sqrt{3}}{4}z^3\right\}
\end{aligned}
$$

给出。公式(7.3.22)给出的两尺度符号的尺度函数称为 Daubechies 的尺度函数 ϕ_2^D(见公式(5.2.6))。 ●

为了讨论方便，引入下述记号。

定义 7.19 对于每个整数 $N\geqslant 2$，令 $S_N(z)$ 表示用公式(7.3.20)给出的方程(7.3.11)的解 $B(z)$，$B(z)$ 是从 $P_N(z)$ 的每个倒数对零点中挑选出来并用公式表示的，具有较大数量的那对规范化使 $B(1)=1$。那么具有两尺度符号

$$
\left(\frac{1+z}{2}\right)^N S_N(z)
$$

的尺度函数用 ϕ_{N+1}^D 表示，并且称为 $N+1$ 阶的 Daubechis 尺度函数。

下面研究紧支撑正交 Daubechis 小波 ψ_m^D 和它们相应的尺度函数 ϕ_m^D 的光滑性的阶。

定义 7.20 令 $\gamma>0$。一个函数 $f\in L^2(\mathbb{R})$ 称为属于类 $\tilde{C}^\gamma$，如果它的 Fourier 变换 $\hat{f}$ 满足

$$
\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|(1+|\omega|)^\gamma d\omega < \infty \qquad (7.3.23)
$$

下面比较类 $\tilde{C}^\gamma$ 与类 $\mathrm{Lip}^m\alpha$，其中 $m=[\gamma]$ 是不超过 γ 的最大整

数，而 $\alpha=\gamma-m$（见定义 5.7）。为了方便，设

$$\mathrm{Lip}^m 0 := C^m(\mathbb{R}) \tag{7.3.24}$$

引理 7.21 对于任何 $\gamma>0$，

$$\tilde{C}^{\gamma} \subseteq \mathrm{Lip}^m \alpha \tag{7.3.25}$$

而有 $m=[\gamma]$ 及 $\alpha=\gamma-m$。

证明 (i) 假定 $\gamma=1$，那么对于每个 $h>0$，有

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{2\pi h}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\{e^{i(x+h)\omega}-e^{ix\omega}\}d\omega \tag{7.3.26}$$

因为

$$\left|\frac{e^{i(x+h)\omega}-e^{ix\omega}}{h}\right| \leqslant |\omega| \tag{7.3.27}$$

我们能够应有 Lebesgue 控制收敛定理得到

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(i\omega)\hat{f}(\omega)e^{ix\omega}d\omega, \quad f \in \tilde{C}$$

现在，既然 $\omega\hat{f}(\omega)\in L^1(\mathbb{R})$，就有 $f'\in C(\mathbb{R})$。

(ii) 如果 γ 是一个正整数，那么公式(7.3.25)能够用归纳法建立。

(iii) 令 $\alpha=\gamma-[\gamma]>0$，那么对于 $f\in\tilde{C}^{\gamma}$，由(ii)得到 $f\in C^m(\mathbb{R})$，其中 $m=[\gamma]$。类似于公式(7.3.26)与(7.3.27)，有

$$|f^{(m)}(x+h)-f^{(m)}(x)|$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\omega|^m|\hat{f}(\omega)|\min(|h\omega|,2)d\omega$$

$$\leqslant \frac{|h|^{\alpha}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\omega|^{\gamma}|\hat{f}(\omega)|d\omega$$

这推出 $f^{(m)}\in \mathrm{Lip}\alpha$，或 $f\in \mathrm{Lip}^{m}\alpha$。

现在准备建立下述定理。

定理 7.22 存在某个正数 λ 使对于所有整数 $m\geqslant 2$ 有 ϕ_{m+1}^{D}，$\psi_{m+1}^{D}\in \mathrm{Lip}^{[\lambda m]}\alpha_m$，$\alpha_m:=\lambda m-[\lambda m]$。

证明 对于 $S=S_m$，令公式(7.3.11)中的量用 T_m 表示。那么，在 $y=\sin^2(\frac{\omega}{4})$ 时，有

$$\begin{aligned}B_2:&=\max_{\omega\in\mathbb{R}}|(S_m(e^{-i\omega})S_m(e^{-i\omega/2})|\\&=\max_{\omega\in\mathbb{R}}\left|T_m(\sin^2\frac{\omega}{2})T_m(\sin^2\frac{\omega}{2})\right|^{1/2}\\&=\max_{0\leqslant y\leqslant 1}|T_m(4y(1-y))T_m(y)|^{1/2}\end{aligned}$$

首先注意到，

$$\max_{0\leqslant y\leqslant 1}T_m(y)<2^{2(m-1)}$$

和

$$T_m(y)\leqslant\sum_{k=0}^{m-1}2^{m+k-1}y^k\leqslant 2^{m-1}m\max(1,(2y)^m)$$

因此，对于 $0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}$，有

$$T_m(y)T_m(4y(1-y))\leqslant m2^{m-1}2^{2(m-1)}=m2^{3(m-1)}$$

还有，对于 $y\geqslant\frac{1}{4}(2+\sqrt{2})$ 或 $4y(1-y)\leqslant\frac{1}{2}$，有

$$T_m(y)T_m(4y(1-y)) \leqslant 2^{2(m-1)}m2^{m-1} = m2^{3(m-1)}$$

最后，对于 $\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant\frac{1}{4}(2+\sqrt{2})$，就有

$$T_m(y)T_m(4y(1-y)) \leqslant m^2 2^{4m-2}\left(\max_{0\leqslant y\leqslant 1}\left[4y^2(1-y)\right]^m\right)$$

$$= m^2 2^{4m-2}\left(\frac{16}{27}\right)^m$$

由这些估计现在得到

$$B_2 \leqslant m2^{2m-1}\left(\frac{16}{27}\right)^{m/2}$$

因此，由定理 5.5 中的公式(5.1.20)得出

$$|\hat{\phi}_{m+1}(\omega)| = \left|\prod_{j=1}^{\infty}P_s(e^{-i\omega/2^j})\right|$$

$$\leqslant C(1+|\omega|)^{[\ln m - m\ln(\frac{8}{\sqrt{3}}\cdots)]/\ln 2}$$

对于 $m\geqslant 16$，能够证明这个指数小于 -1。对于 $m<16$，人们能够估计出

$$B_1 := \max_{\omega\in\mathbb{R}}|S_m(e^{i\omega})| = \left[\binom{2m-1}{m}\right]^{1/2}$$

直接得到对于某个 $\eta>0$

$$|\hat{\phi}_{m+1}(\omega)| \leqslant C(1+|\omega|)^{-1-\eta m}$$

求助于引理 7.21，现在完成了定理的证明。 ●

附注 令 α_m 是使 $\phi^D_{m+1}\in\mathscr{C}^{\alpha_m}$ 的“最大”值，那么有

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\alpha_m}{m} = 1 - \frac{1}{2}\log_2 3 \doteq 0.207\,5 \qquad (7.3.28)$$

这个结果的证明超出了本书的范围。

7.4 正交小波包

一个正交尺度函数ϕ的两尺度序列$\{p_k\}$包含了关于ϕ的全部信息，同时用

$$q_k = (-1)^k \bar{p}_{-k+1}$$

定义的序列$\{q_k\}$完全表征了其相应的正交小波ψ。在下文中，使用记号

$$\begin{cases} \mu_0(x) := \phi(x) \\ \mu_1(x) := \psi(x) \end{cases} \qquad (7.4.1)$$

和

$$\begin{cases} P_0(z) := P(z) = \frac{1}{2}\sum_k p_k z^k \\ P_1(z) := Q(z) = \frac{1}{2}\sum_k q_k z^k = \frac{1}{2}\sum_k (-1)^k \bar{p}_{-k+1} z^k \end{cases} \qquad (7.4.2)$$

因此，尺度函数ϕ与其相应的小波ψ的两尺度关系用

$$\begin{cases} \mu_0(x) = \sum_k p_k \mu_0(2x - k) \\ \mu_1(x) = \sum_k q_k \mu_0(2x - k) \end{cases} \qquad (7.4.3)$$

给出，或等价地，

$$\begin{cases} \hat{\mu}_0(\omega) = P_0(e^{-i\omega/2})\hat{\mu}_0(\frac{\omega}{2}) \\ \hat{\mu}_1(\omega) = P_1(e^{-i\omega/2})\hat{\mu}_0(\frac{\omega}{2}) \end{cases} \tag{7.4.4}$$

这个新的记号想要使下述称为"小波包"(wavelet packets)的函数族的介绍来得容易些。由这些函数得出正交基，它们能够用来改善小波对时间-频率局部化的性能。

定义 7.23 用

$$\begin{cases} \mu_{2l}(x) := \sum_k p_k \mu_l(2x - k) \\ \mu_{2l+1}(x) := \sum_k q_k \mu_l(2x - k) \end{cases} \tag{7.4.5}$$

定义的函数 μ_n，$n=2l$ 或 $2l+1$，$l=0,1,\cdots$，称为关于正交尺度函数 $\mu_0=\phi$ 的"小波包"。

因此，族 $\{\mu_n\}$ 是正交小波 $\mu_1=\psi$ 的一种推广。为了由其 Fourier 变换描述 μ_n，$n\in\mathbb{Z}_+$，需 $n\in\mathbb{Z}_+$ 的二进展开，即：

$$n = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j 2^{j-1}, \quad \varepsilon_j \in \{0,1\} \tag{7.4.6}$$

注意，公式(7.4.6)总是一个有限和并且展开是唯一的。事实上，如果 $2^{s_0-1} \leqslant n < 2^{s_0}$，那么有 $n = 2^{s_0-1} - n_1$，其中 $2^{s_1-1} \leqslant n_1 < 2^{s_1}$，而 $s_1 < s_0$；并且重复这个过程，可得到 $n = 2^{s_0-1} + 2^{s_1-1} + \cdots + 2^{s_k-1}$，其中 $1 \leqslant s_k < \cdots < s_0$。即，对于 $j=s_k,\cdots,s_0$ 时 $\varepsilon_j=1$，否则 $\varepsilon_j=0$。

定理 7.24 令 n 是任一非负整数并且令 n 的二进展开用公式(7.4.6)给定，那么，小波包 μ_n 的 Fourier 变换用下式给出：

$$\hat{\mu}(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} P_{\varepsilon_k}(e^{-i\omega/2^k}), \quad \omega \in \mathbb{R} \tag{7.4.7}$$

证明 小波包的两尺度关系公式(7.4.5)的 Fourier 变换等式用公式(7.4.8)给出:

$$\begin{cases} \hat{\mu}_{2l}(\omega) = P_0(e^{-i\omega/2})\hat{\mu}_l(\frac{\omega}{2}) \\ \hat{\mu}_{2l+1}(\omega) = P_1(e^{-i\omega/2})\hat{\mu}_l(\frac{\omega}{2}) \end{cases} \tag{7.4.8}$$

考虑到公式(7.4.4),可以用关于 $2l$ 或 $2l+1$ 的归纳着手证明公式(7.4.7)。假定公式(7.4.7)对于所有具有 $0 \leqslant n < 2^{r_0}$ 的 n 成立,并且考虑 $2^{r_0} \leqslant n < 2^{r_0+1}$。由上述提供的讨论,有

$$\varepsilon_j = \begin{cases} 1 & 对于\ j = r_0 + 1 \\ 0 & 对于\ j > r_0 + 1 \end{cases}$$

所以

$$n = \sum_{j=1}^{r_0+1} \varepsilon_j 2^{j-1}$$

并且

$$\frac{n}{2} = \frac{\varepsilon_1}{2} + \sum_{j=1}^{r_0} \varepsilon_{j+1} 2^{j-1}$$

像通常一样,令[x]表示不超过 x 的最大整数,并且注意,

$$n = 2\left[\frac{n}{2}\right] + \varepsilon_1 \tag{7.4.9}$$

因此,由公式(7.4.8),有

$$\hat{\mu}_n(\omega) = P_{\varepsilon_1}(e^{-i\omega/2})\hat{\mu}_{[n/2]}(\frac{\omega}{2}) \tag{7.4.10}$$

另一方面，因为

$$[\frac{n}{2}] - \sum_{j=1}^{s_0} \varepsilon_{j+1} 2^{j-1} < 2^{s_0}$$

由归纳假设得到

$$\hat{\mu}_{[n/2]}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} P_{\varepsilon_{j+1}}(e^{-i\omega/2^j}) \tag{7.4.11}$$

因而，结合公式(7.4.10)与(7.4.11)，得到公式(7.4.7)。 ●

下面，证明小波包保持正交尺度函数 $\mu_0 = \phi$ 的正交性质。

定理 7.25 令 ϕ 是任一正交尺度函数而 $\{\mu_n\}$ 是其相应的小波包族。那么对于每个 $n \in \mathbb{Z}$，

$$< \mu_n(\cdot - j), \mu_n(\cdot - k) > = \delta_{j,k}, \quad j, k \in \mathbb{Z} \tag{7.4.12}$$

证明 因为 $\mu_0 = \phi$ 满足公式(7.4.12)，可以用归纳法着手证明。假定公式(7.4.12)对于具有 $0 \leqslant n < 2^{s_0}$ 的所有 n 成立，并且考虑 $2^{s_0} \leqslant n < 2^{s_0+1}$。那么，像在定理 7.24 中证明的那样，应用公式(7.4.8)与(7.4.9)，有

$$\begin{aligned}
&< \mu_n(\cdot - j), \mu_n(\cdot - k) > \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\mu}_n(\omega)|^2 e^{i(k-j)\omega} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |P_{\varepsilon_1}(e^{-i\omega/2})|^2 \left| \hat{\mu}_{[n/2]}(\frac{\omega}{2}) \right|^2 e^{i(k-j)\omega} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{4\pi l}^{4\pi(l+1)} |P_{\varepsilon_1}(e^{-i\omega/2})|^2 \left| \hat{\mu}_{[n/2]}(\frac{\omega}{2}) \right|^2 e^{i(k-j)\omega} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} e^{i(k-j)\omega} |P_{\varepsilon_1}(e^{-i\omega/2})|^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left| \hat{\mu}_{[n/2]}(\frac{\omega}{2} + 2\pi l) \right|^2 d\omega
\end{aligned}$$

因此，用归纳假设和定理 3.23，得到

$$
\begin{aligned}
&< \mu_n(\cdot - j), \mu_n(\cdot - k) > \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{4\pi} e^{i(k-j)\omega} |P_{r_1}(e^{-i\omega/2})|^2 d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-j)\omega}\{|P_{r_1}(e^{-i\omega/2})|^2 \\
&\quad + |P_{r_1}(-e^{-i\omega/2})|^2\} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-j)\omega} d\omega = \delta_{j,k}
\end{aligned}
$$

其中下述两个恒等式之一：

$$
\begin{cases}
|P(z)|^2 + |P(-z)|^2 = 1 \\
|Q(z)|^2 + |Q(-z)|^2 = 1, \quad |z| = 1
\end{cases}
\tag{7.4.13}
$$

被应用（见公式(7.2.4)与(7.1.3)）。 ●

正交尺度函数 $\mu_0 = \phi$ 与其相应的小波 $\mu_1 = \psi$ 之间的正交性质还可扩展到小波包，像在下述定理中表明的那样。

定理 7.26 令 ϕ 是一正交尺度函数而 $\{\mu_n\}$ 是其相应的小波包。那么

$$
< \mu_{2l}(\cdot - j), \mu_{2l+1}(\cdot - k) > = 0, \quad j,k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}_+ \tag{7.4.14}
$$

证明 在着手证明之前，首先写出恒等式

$$
\begin{aligned}
&P_0(z)\overline{P_1(z)} + P_0(-z)\overline{P_1(-z)} \\
&\quad = P(z)\overline{Q(z)} + P(-z)\overline{Q(-z)} = 0, \\
&\quad\quad |z| = 1
\end{aligned}
\tag{7.4.15}
$$

这等价于在引理 7.9 中的恒等式(iv)。因此，应用公式(7.4.8)，

(7.4.15)和定理 7.25 与 3.23，对于所有 $j,k\in\mathbb{Z}$ 与 $l\in\mathbb{Z}_+$，得到

$$
\begin{aligned}
&<\mu_{2l}(\cdot-j),\mu_{2l+1}(\cdot-k)> \\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\mu}_{2l}(\omega)\overline{\hat{\mu}_{2l+1}(\omega)}e^{i(k-j)\omega}d\omega \\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{\mu}_l\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2P_0(z)\overline{P_1(z)}e^{i(k-j)\omega}d\omega \\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{4\pi}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left|\hat{\mu}_l\left(\frac{\omega}{2}+2\pi m\right)\right|^2\right\}P_0(z)\overline{P_1(z)}e^{i(k-j)\omega}d\omega \\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{4\pi}P_0(z)\overline{P_1(z)}e^{i(k-j)\omega}d\omega \\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{P_0(z)\overline{P_1(z)}+P_0(-z)\overline{P_1(-z)}\}e^{i(k-j)\omega}d\omega \\
&=0
\end{aligned}
$$

其中 $z=e^{-i\omega/2}$。 ●

7.5 小波级数的正交分解

令 $\{\mu_n\}$ 是相应于某个正交尺度函数 $\mu_0=\phi$ 的小波包的族。对于每个 $n\in\mathbb{Z}_+$，研究用 $\{\mu_n\}$ 生成的子空间族：

$$
U_j^n := \operatorname{clos}_{L^2(\mathbb{R})}<2^{j/2}\mu_n(2^j\cdot-k): k\in\mathbb{Z}>
\quad j\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{Z}_+ \tag{7.5.1}
$$

回忆

$$
\begin{cases}
U_j^0=V_j, & j\in\mathbb{Z} \\
U_j^1=W_j, & j\in\mathbb{Z}
\end{cases} \tag{7.5.2}
$$

其中 $\{V_j\}$ 是用 $\mu_0=\phi$ 生成的 $L^2(\mathbb{R})$ 的 MRA，而 $\{W_j\}$ 是用小波 $\mu_1=\psi$ 生成的正交分量(小波)子空间序列。那么，正交分解

$$V_{j+1}=V_j\oplus W_j,\quad j\in\mathbb{Z}$$

可以写作为

$$U_{j+1}^0=U_j^0\oplus U_j^1,\quad j\in\mathbb{Z}\tag{7.5.3}$$

下面将看到，这个正交分解能够由 $n=0$ 推广到任一 $n\in\mathbb{Z}_+$。

定理 7.2.7 令 n 是任一非负整数，那么

$$U_{j+1}^n=U_j^{2n}\oplus U_j^{2n+1},\quad j\in\mathbb{Z}\tag{7.5.4}$$

证明 由定义 7.23 中的公式(7.4.5)，很明显 U_j^{2n} 与 U_j^{2n+1} 是 U_{j+1}^n 的子空间。而且用定理 7.26，可看到这两个子空间互相是正交的。所以，证明

$$\mu_n(2^{j+1}x-m)=\frac{1}{2}\sum_k\{p_{m-2k}\mu_{2n}(2^jx-k)$$
$$+\bar{q}_{m-2k}\mu_{2n+1}(2^jx-k)\}\tag{7.5.5}$$

对于所有 $m\in\mathbb{Z}$ 成立就足够了。

为此，把公式(7.4.5)应用于公式(7.5.5)的右边并且使用在引理 7.9 中恒等式(v)简化表示式：

$$\frac{1}{2}\sum_k\{p_{m-2k}\mu_{2n}(2^jx-k)+\bar{q}_{m-2k}\mu_{2n+1}(2^jx-k)\}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_k\sum_l\{\bar{p}_{m-2k}p_l+\bar{q}_{m-2k}q_l\}\mu_n(2^{j+1}x-2k-l)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_k\sum_l\{\bar{p}_{m-2k}p_{l-2k}+\bar{q}_{m-2k}q_{l-2k}\}\mu_n(2^{j+1}x-l)$$
$$=\sum_l\left\{\frac{1}{2}\sum_k[p_{l-2k}\bar{p}_{m-2k}+q_{l-2k}\bar{q}_{m-2k}]\right\}\mu_n(2^{j+1}x-l)$$

$$= \sum_{l} \delta_{l,m} \mu_n (2^{j+1}x - l) = \mu_n (2^{j+1}x - m)$$

这就完成了定理的证明。 ●

一个正交小波 ψ 的重要性是以这样一种方式生成 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个正交基 $\{\psi_{j,k}\}$，$j,k \in \mathbb{Z}$，对于每个 $j \in \mathbb{Z}$，子族 $\{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ 不仅是

$$W_j = \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} < \psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z} >$$

的一个正交基，而且还是在第 j 个频带（或第 j 个倍频程）内（在数量与位置方面）提取局部信息的一个时间窗，

$$H_j := (2^{j+1} \Delta_{\hat{\psi}}, 2^{j+2} \Delta_{\hat{\psi}}] \tag{7.5.6}$$

其中 $\Delta_{\hat{\psi}}$ 是小波的均方根带宽（见 3.2 与 3.4 节，特别是公式 (3.4.1)(3.4.5)）。注意，频带 H_j 的宽度在较高频率范围增加。下面将看到，小波包具有划分较高频率倍频程的能力，以得到比较好的频率局部化。

定理 7.28 对于每个 $j=1,2,\cdots$，

$$\begin{cases} W_j = U_{j-1}^2 \oplus U_{j-1}^3 \\ W_j = U_{j-2}^4 \oplus U_{j-2}^5 \oplus U_{j-2}^6 \oplus U_{j-2}^7 \\ \cdots\cdots \\ W_j = U_{j-k}^{2^k} \oplus U_{j-k}^{2^k+1} \oplus \cdots \oplus U_{j-k}^{2^{k+1}-1} \\ \cdots\cdots \\ W_j = U_0^{2^j} \oplus U_0^{2^j+1} \oplus \cdots \oplus U_0^{2^{j+1}-1} \end{cases} \tag{7.5.7}$$

而且，对于每个 $m=0,\cdots,2^k-1$，$k=1,\cdots,j$ 和 $j=1,2,\cdots$，族

$$\left\{ 2^{\frac{j-k}{2}} \mu_{2^k+m}(2^{j-k}x - l) : l \in \mathbb{Z} \right\} \tag{7.5.8}$$

是 $U_{j-k}^{2^k+m}$ 的一个规范正交基。

附注 使用公式(7.5.7)中的第 k 个正交分解,第 j 个频带 H_j 进一步划分成 2^k 个"子频带":

$$H_j^{k,m}, \quad m = 0, \cdots, 2^k - 1 \tag{7.5.9}$$

当然,公式(7.5.8)中 $U_{j-k}^{2^k+m}$ 的正交基提供了在子频带 $H_j^{k,m}$ 内的时间局部化,并且族

$$\{H_j^{k,m}; m = 0, \cdots, 2^k - 1\}$$

的并是整个 H_j。

证明 设 $n=1$ 并且承认 $U_j^1 = W_j$,那么公式(7.5.7)的证明是简单地重复定理 7.27 中公式(7.5.4)的应用。公式(7.5.8)中的族是 $U_{j-k}^{2^k+m}$ 的一个正交基,也是公式(7.5.1)与在定理 7.25 中的公式(7.4.12)中的一个推论。 ●

附注 考虑到公式(7.5.5)的分解公式,任何小波级数

$$g_j(x) = \sum_n d_n^j \psi(2^j x - n) = \sum_n d_n^j \mu_1(2^j x - n) \tag{7.5.10}$$

都可分解为小波包分量

$$g_{j;k,m}(x) := \sum_n d_n^{j;k,m} \mu_{2^k+m}(2^{j-k} x - n)$$
$$m = 0, \cdots, 2^k - 1 \tag{7.5.11}$$

的一个正交和(对于任一固定 k 值,$1 \leqslant k \leqslant j$)能够用公式表示为一个"树",其中树的每个支具有两个子支。如公式(5.4.48)给出的具有

$$
\begin{cases}
a_n = \frac{1}{2}\bar{p}_n \\
b_n = \frac{1}{2}\bar{q}_n = \frac{1}{2}(-1)^n p_{-n+1}
\end{cases}
\tag{7.5.12}
$$

的同样的分解算法能够用于每个支的分解。当然,这个树的分解算法应该设计得适用;特别是,如果某个小波分量不像其它分量重要,那么用选取 k 的较小值使它们具有很少的支。对于重构,树的算法能够应用具有权序列 p_n 与 $q_n=(-1)^n\bar{p}_{-n+1}$ 的重构算法倒转。

对于"最好"正交分解,选择每个 k 为最大,即,使用公式(7.5.7)中的最后那个公式。

推论 7.29 对于每个 $j=0,1,2,\cdots$,

$$
\begin{aligned}
L^2(\mathbb{R}) &= \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j \\
&= \cdots \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus U_0^2 \oplus U_0^3 \oplus \cdots
\end{aligned}
\tag{7.5.13}
$$

当然,族

$$
\{\psi_{j,k}, \mu_n(\cdot - k) : j = \cdots, -1, 0; n = 2, 3, \cdots; k \in \mathbb{Z}\}
\tag{7.5.14}
$$

是 $L^2(\mathbb{R})$的一个规范正交基。

注　　解

第一章

三角级数的标准参考文献是 Zygmund[9]。有关 Fourier 级数的其它的书是 Bari[1]，Helson[5]，Katznelson[6]，Stein 与 Weiss[7]。这些书对我们准备第一、二章是很有帮助的。

最简单的正交小波是由 A. Haar[55]研究的 Haar 函数。积分小波变换 $(W_\psi f)(b,a)$ 的概念首先是 Grossmann 和 Morlet[54]引入的，但基于使用平移与膨胀的方法可追溯到在奇异积分算子研究中的 Calderón[30]。使用于积分小波变换公式的基小波在小波文献中还称为"母小波"。任一 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 由它的积分小波变换 $(W_\psi f)(b,a)$，$a,b \in \mathbb{R}$ 的复原公式能够在[54]中找到。

在图象压缩中，半离散积分小波变换 $(W_\psi f)(b,a)$，其中 $b \in \mathbb{R}$ 与 $a=2^{-j}$，$j \in \mathbb{Z}$ 的重要性首先是由 Mallat 指出的，并且二进小波的概念还是由 Mallat 在他与 W. L. Hwang[60]以及他与 S. Zhong[61,62]的合作工作中引入的。Mallat 和 Hwang[60]中研究的关于二进小波的稳定性条件能够看作是 Littlewood-Paley 恒等式的一种推广。框架与小波这类不等式是在 Daubechies[50]和 Chui 与 Shi[38]中研究的，特别是，由 Chui 与 Shi[38]中使用的恒等式便于表征小波。

关于信号处理的一般参考文献是 Oppenhein 和 Schafer[25]，而这个问题的数学的分析是在 Chui 与 Chen[24]中给出的。讨论在信号和图象处理中的某些专门的但有关的题目的其它参考文献

是 Auslander,Kailath 与 Mitter[22],和 Rosenfeld[26]。

一个 $\mathscr{R}$ 函数不必要是一个 $\mathscr{R}$ 小波(或小波),这已由 Y. Meyer 在[21]的第一卷中注意到了,并且 Daubechies 在[50]中已相当详细地讨论了,其中使用了 Tchamitchian[68,69]的结果。本章的证明已由 Chui 与 Shi 在[37]中根据 Daubechies 与 Meyer 的思想给出。

多分辨分析的概念首先是由 Meyer[63]与 Mallat[58]引入的,并且由 Mallat 在[57,59]中作了进一步地研究。还是 Mallat [57—59]使用多分辨分析空间构造了小波分解与重构算法。在本章中,这些算法的表示见[40,43],其中,规范化常数 $\sqrt{2}$ 为简化计算被基函数合并了。注意,由于 Burt 和 Adelson[29]的结果,多分辨分析和 Laplacian 金字塔算法之间有一些类似。

关于基数样条的最广泛的工作是 Schoenberg 的[14],他还负责这个课题的研究。Meyer[63]和 Lemarié[56]注意到,基数样条空间产生多分辨分析,虽然逼近论理论学者还考虑了分割方案(见 Chui[11]和其中的参考文献)。相应于 m 阶 B-样条 N_m,m 阶 B-小波 ψ_m 是由 Chui 和 Wang[43]引入的。ψ_m 的对偶 $\tilde{\psi}_m$ 还在[43]中根据 Chui 和 Wang 在[40]中引入的 $2m$ 阶位移与缩比的基本样条的 m 次导数被构造。

预报-校正算法可以采用,以便实现无限脉冲响应(IIR)滤波作为极点位于单位圆内外的自回归移动平均(ARMA)滤波。这些算法能够通过把它们与噪声过程结合而优化(见 Chui 和 Chen [23])。这个方法应用于样条小波的分解而无须截断。

第二章

关于 Fourier 变换在本著作中有许多好的参考文献。其中的 Goldberg[4]和 Titchmarsh[8]对我们准备第二章是很有帮助的。

因为 $L^p(\mathbb{R})$或 $L^p(0,2\pi)$中的函数认为是函数的"等价类",所以我们允许改变在测度为零的集合上的函数。特别是,在逐点收敛

的叙述中，我们总是指收敛于所考虑的等价类的某个表示。

另外，有关调和分析的书[1,5,6,7,9]是进一步阅读的好参考。这个科目有十分丰富多采的历史。这里，我们只包括关于逐点收敛研究的一个很简短的讨论。早在 1876 年，du Bois-Reymond 已经证明：存在 2π 周期函数，它的 Fourier 级数在某些点不收敛。由这个结果，证明 Fourier 级数在实直线 $\mathbb{R}$ 的一个稠密子集上不收敛的 2π 周期函数的存在是不困难的。在 1923 年，Kolmogorov 推广了这个观察结果，并且证明了，某个 2π 周期连续函数的 Fourier 级数可以几乎处处不收敛。三年以后，他又推广了这个结果，并且证明了，具有几乎处处不收敛 Fourier 级数的某个函数 $f\in L^1(0,2\pi)$ 的存在性。另一方面，在 1966 年，Carleson 证明了，如果 $f\in L^2(0,2\pi)$，那么它的 Fourier 级数几乎处处收敛。这个很深刻的结果由 Hunt 在 1967 年推广到了对每个函数 $f\in L^p(0,2\pi)$，$p>1$。

本章给出了 Poisson 求和公式较为广泛的讨论，因为这个公式的若干改变在本书中到处都被使用。

第三章

窗口 Fourier 变换首先是 Gabor[53]使用 Gaussian 函数作为窗函数引入的。这就是为什么还称 Gabor 变换的原因。在工程技术文献中，不限制使用 Gaussian 函数的这个开窗过程，也称为短时 Fourier 变换(STFT)，见 Daubechies[20,50]，Mallat[57]，书[16,17,18,19]中的一些章节和其中的一系列参考文献。涉及使用标准差定义窗函数的半径、宽度以及测不准原理讨论的材料，读者可参考上述相同的资料。正如前面所述，当我们认为一个函数属于 $L^p(\mathbb{R})$ 时，我们实际是指除了在测度为零的集合外，函数等价类的表示是恒等的。特别是，当可能时，我们总是使用一个连续函数的代表作为窗函数。为了从调和分析的观点作进一步的讨论和参考，还可见 Champeney[2]。

正如像第一章的注释所述,Grossmann 和 Morlet[54]引入了积分小波变换,其中在基小波(也称为母小波)上强加了容许性条件公式(3.3.1)。积分小波变换的半离散的形式在 Mallat 关于图象压缩的工作中已经证明是很有用的,在这个工作中第一次使用了零交叉和后来使用了在二进尺度等级上积分小波变换的小波极大(或局部极值)。见 Mallat 与 Zhong[61,62]和 Mallat 与 Hwang[60]的研究。在这方面,稳定性条件公式(3.4.6)对于 Mallat 与 Hwang[60]引入的反演公式(3.4.14)是至关重要的。使用 Littlewood-Paley 的恒等式对二进对偶的表征在 Chui 和 Shi[38]中给出了。

框架的概念是由 Duffin 和 Schaeffer[51]引入的,而Daubechies[20,50]进行了相当详细的研究。例子 3.18 也归于Daubechies。使用于由框架生成的逆映射的无界性的讨论中,开映射原理在算子理论中是标准的(见 Dunford 和 Schwartz[3],Vol. 1,P57)。框架的稳定性性质公式(3.5.18)在 Chui 和 Shi[37]中被推导。注意,Frazier 和 Jawerth[52]在他们关于 φ 变换的研究中使用了膨胀与平移。

半正交小波是 Auscher[27]和 Chui 与 Wang[40,41,43]各自独立引入的,而半正交基数样条-小波是由 Chui 和 Wang 在[40,43]中首先构造的。公式(3.6.18)中的规范正交化过程是由于 Schweinler 和 Wigner[66]的结果,所以称为 Schweinler-Wigner 正交化过程。

第四章

样条分析是一个已建立了的科目。对于一元理论,读者参考 de Boor[10],Nürnberger[13],Schoenberg[14]和 Schumaker[15];对于多元的研究,参考 Chui[11]。具有等距(简单)节点的样条函数称为基数样条函数,为了进一步研究,读者可参考 Schoenberg[14,65]。特别是,Euler-Frobenius 多项式的构造是在[14,65]中提供的。

4.3 节中介绍的图形显示算法(算法 4.7)是标准的分割方案的迭代。这里提出是为了启发引出在第 5 章中的(小波)重构算法。基数 B-样条的 B-网算法(算法 4.10)是在 Chui 和 Lai[36]中研究的箱样条图形显示算法的一元形式。

拟插值概念是由于 de Boor 与 Fix(见 de Boor[10]和 Schumaker[15])的结果。Neumann 级数方法首先是 Chui 与 Diamond 在[35]中引入的,在那儿建立了定理 4.13。这里提出的拟插值的表征(见公式(4.5.35)-(4.5.36))是 Chui 与 Diamond[33]给出的。基数样条插值的理论是由 Schoenberg 发展的(见 Schoenberg[14,65])。在 4.6 节中,采用完全局部插值算子与拟插值算子的"Boolean 和"提供的局部插值公式的构造是 Chui 与 Diamond 在[34]中引入的。这个题目的指导性研究在 Chui[32]中,更一般性的研究在 Chui[31]中给出。

第五章

多分辨分析(MRA)的概念首先是 Meyer[63]与 Mallat[58]引入的,并且由 Mallat 在[57,59]中进一步发展了。定理 5.5 与 5.6 是由于 Cohen[44]的结果。关于一个尺度函数的支撑用它的两尺度序列的长度给出结果是由于 Daubechies[49]的研究,并且公式(5.2.6)中定义的尺度函数还是在[49]中给出。借助于对称零点不存在的最小支撑尺度函数的表征是由 Chui 与 Wang[41]给出,其中引入了广义 Euler-Frobenius(Laurent)多项式的概念和它们的性质,如定理 5.10 中研究的那些性质。m 阶 B-样条是生成 MRA $\{V_j^m\}$ 最好的函数并且具有有限两尺度序列这个事实也是在[41]中证明的。在 5.3 节中,直接和分解的表示似乎是新的,而 5.4 节中的方法是 Cohen,Daubechies 与 Feauveau 在[46]中研究的推广。特别是定理 5.19 中的准则公式(5.4.11)是新的。样条小波,更一般地说,半正交小波的对偶原理分别是 Chui 与 Wang[43]和[41]中引入的,而非正交(或双正交)形式再次在 Cohen,Daubechies 与

Feauveau[46]中求得。

如前所述，小波分解与重构算法是在 Mallat[58]中构造的。这里的公式采用了[40,43]。线性相位在滤波中的重要性和线性相位与对称性之间的关系在工程文献中是众所周知的(见 Oppenheim 与 Schafer[25])。5.5 节与 5.6 节中的讨论是 Chui 与 Wang 在[41]中结果的推广。

对偶关系公式(5.6.17)的通解公式(5.6.39)是在 Daubechies[49]中对于正交情形给出的，一般情形是在 Cohen，Daubechies 与 Feauveau[46]中给出的。满足线性相位要求的具有紧支撑对偶的紧支撑小波还是由 Cohen，Daubechies 与 Feauveau 在[46]中构造的。滤波器框方法是由 Vetterli 与 Herley[70]研究的。

第六章

定理 6.1 中给出的插值样条小波是由于 Chui 与 Wang[40]的结果，并且 V_1^m 的 MRA 子空间 $V^{2m,0}$ 与小波空间 W_0^m 之间的同化是在 Chui 与 Wang[39]中引入的。公式(6.2.5)中给出的紧支撑基数样条小波(或 B-小波)，连同公式(6.2.10)中它们的对偶，是 Chui 与 Wang 在[43]中引入的。然而，6.2 节中的表示是完全不同的，因为它使用了由第 5 章的定理 5.19 更一般的结果。计算 B-小波和它们导数的 Pascal 三角形算法(PTA)是在 Chui 与 Wang[42]中引入的。

Euler-Frobenius 多项式性质的表示采用 Schoenberg[65]，而样条小波分解中关于误差分析的材料取自 Chui 与 Wang[42]。关于全正性最全面的文献是 Karlin[12]，而且关于 Pólya 频率序列的另外的信息可在 Schoenberg[14]中找到。产生 Pólya 频率序列的某些线性 PTA 的定理 6.21 在 Chui 与 Wang[39]中得到证明，在那里首先引入了完全振荡的概念并且研究了它与零交叉的关系。

第七章

第一个非平凡的小波是由 Strömberg[67]使用样条函数构造的。例子 7.3 中研究的 Meyer 小波[64]是具有紧支撑 Fourier 变换的正交小波。例子 7.1 中给出的正交样条小波通常称为 Batttle-Lemarie' 小波，因为它们是由 Battle[28]与 Lemarie' [56]使用不同的方法各自独立构造的。然而，这些正交小波都不具有紧支撑。基于 MRA 的结构，Daubechies[49]首先构造了紧支撑正交小波。因此，她的构造像在 7.2 节中讨论的那样是基于正交尺度函数的辨别，但这里的表示与在[49]中的有些不同。Daubechies 小波的构造还依赖于定理 7.17 中所述的 Riesz 引理。定理 7.22 也由 Daubechies[49]证明，而公式(7.3.28)中所述的结果是由 Cohen 与 Daubechies 在[45]中建立的。

小波包，也称为小波束，是 Coifman，Meyer，Quake 与 Wickerhauser[47]中引入的。更深入的资料可见 Coifman，Meyer 与 Wickerhauser[48]。

附 录 A

为了能够实现由公式(5.4.48)和(5.4.49)描述的小波的分解和重构算法，我们必须加权序列$\{a_k\}$，$\{b_k\}$，$\{p_k\}$及$\{q_k\}$。此外，重构(或两尺度)序列$\{p_k\}$和$\{q_k\}$可以用于绘出尺度函数ϕ和小波ψ的图(见公式(5.2.11)，(5.2.14)～(5.2.17)及(5.3.4))。下面考虑m阶的基数B-样条$\phi=N_m$和小波$\psi=\psi_m$。回顾公式(6.3.3)～(6.3.4)给出的两尺度序列

$$\begin{cases} p_k = p_{m,k} \\ q_k = q_{m,k} \end{cases}$$

是特别简单的，并且它们的分解序列

$$\begin{cases} a_k = a_{m,k} \\ b_k = b_{m,k} \end{cases}$$

能够使用公式(6.5.1)～(6.5.2)计算。因为这些序列是对称的，只要计算一半值就足够了。更详细地，对于所有$k\in\mathbb{Z}$，有

$$\begin{cases} a_{m,k} = a_{m,m-k} \\ b_{m,k} = b_{m,3m-2-k} \end{cases} \tag{A.1}$$

和

$$\begin{cases} p_{m,k} = p_{m,m-k} \\ q_{m,k} = q_{m,3m-2-k} \end{cases} \tag{A.2}$$

在实践中，特别是在基数样条插值中，线性与三次样条使用最频繁，所以，在表 A.1 与 A.2 中，对于$m=2$与$m=4$给出了$a_k=a_{m,k}$，

$b_k=b_{m,k}$ 和 $p_k=p_{m,k}$，$q_k=q_{m,k}$ 的值。对于序列的另外的“一半”，提醒读者参考公式(A.1)和(A.2)。

表 A.1　样条小波分解序列

	$m=2$		$m=4$	
k	a_k	b_{k+1}	a_{k+1}	b_{k+4}
1	0.683 012 701 892	0.866 025 403 784	0.893 162 856 314	−1.475 394 519 892
2	0.316 987 298 108	−0.316 987 298 108	0.400 680 825 467	0.468 422 596 633
3	−0.116 025 403 784	−0.232 050 807 569	−0.282 211 870 811	0.742 097 698 477
4	−0.084 936 490 539	0.084 936 490 539	−0.232 924 626 134	−0.345 770 890 775
5	0.031 088 913 246	0.062 177 826 491	0.129 083 571 218	−0.389 745 530 800
6	0.022 758 664 048	−0.022 758 664 047	0.126 457 446 356	0.196 794 277 304
7	−0.008 330 249 198	−0.016 660 498 395	−0.066 420 837 387	0.207 690 838 380
8	−0.006 098 165 652	0.006 098 165 652	−0.067 903 608 499	−0.106 775 803 373
9	0.002 232 083 545	0.004 464 167 091	0.035 226 101 674	−0.111 058 440 711
10	0.001 633 998 562	−0.001 633 998 561	0.036 373 586 989	0.057 330 952 254
11	−0.000 598 084 983	−0.001 196 169 967	−0.018 815 686 621	0.059 433 338 390
12	−0.000 437 828 595	0.000 437 828 595	−0.019 473 269 356	−0.030 709 700 871
13	0.000 160 256 388	0.000 320 512 777	0.010 066 747 520	−0.031 811 811 318
14	0.000 117 315 818	−0.000 117 315 818	0.010 424 052 187	0.016 440 944 687
15	−0.000 042 940 569	−0.000 085 881 139	−0.005 387 929 819	0.017 028 029 466
16	−0.000 031 434 679	0.000 031 434 678	0.005 579 839 208	−0.008 800 839 839
17	0.000 011 505 891	0.000 023 011 782	0.002 883 979 478	−0.009 114 745 138
18	0.000 008 422 897	−0.000 003 122 897	0.002 986 784 625	0.004 710 957 034
19	−0.000 003 082 990	−0.000 006 165 980	−0.001 543 728 719	0.004 878 941 541
20	−0.000 002 256 905	0.000 002 256 905	−0.001 598 768 083	−0.002 521 687 975
21	0.000 000 826 079	0.000 001 652 158	0.000 826 326 663	−0.002 611 601 542

表 A.2　重构(或两尺度)序列

	$m=2$		$m=4$	
k	p_k	q_{k+1}	p_{k+1}	q_{k+4}
1	$\frac{2}{2}$	$\frac{20}{4!}$	$\frac{6}{8}$	$-\frac{24\ 264}{8!}$
2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{12}{4!}$	$\frac{4}{8}$	$-\frac{18\ 482}{8!}$
3		$\frac{2}{4!}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{7\ 904}{8!}$
4				$\frac{1\ 677}{8!}$
5				$-\frac{124}{8!}$
6				$\frac{1}{8!}$

参考文献

书

Fourier 分析和算子理论

1. Bari, N. K.: *A Treatise on Trigonometric Series*, Macmillan, 1964
2. Champeney, D. C.: *A Handbook of Fourier Theorems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987
3. Dunford, N. and J. Schwartz: *Linear Operators*, Interscience, New York, 1958
4. Goldberg, R. R.: *Fourier Transforms*, Cambridge University Press, 1965
5. Helson, H.: *Harmonic Analysis*, The Wadworth & Brooks/Cole Mathematics Series, Addison-Wesley, 1983, reprinted by Wadsworth, 1991
6. Katznelson, Y.: *An Introduction to Harmonic Analysis*, John Wiley and Sons, 1968, reprinted by Dover, New York, 1976
7. Stein, E. M. and G. Weiss: *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, 1971
8. Titchmarsh, E. C.: *Introduction to the Theory of Fourier Integrals* (Second Edition), Oxford University Press, 1948
9. Zygmund, A.: *Trigonometric Series* (Second Edition), in two volumes, Cambridge University Press, 1959

样条分析

10. de Boor, C. : *A Practical Guide to Splines*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 27, Springer-Verlag, 1978

11. Chui, C. K. : *Multivariate Splines*, CBMS-NSF Series in Applied Math. #54, SIAM Publ., Philadelphia, 1988

12. Karlin, S. : *Total Positivity*, Stanford University Press, Stanford, CA, 1968

13. Nürnberger, G. : *Approximation by Spline Functions*, Springer-Verlag, New York, 1989

14. Schoenberg, I. J. : *Cardinal Spline Interpolation*, CBMS-NSF Series in Applied Math. #12, SIAM Publ., Philadelphia, 1973

15. Schumaker, L. L. : *Spline Functions: Basic Theory*, Wiley-Interscience, New York, 1981.

小波理论与应用

16. Beylkin, G., R. Coifman, I. Daubechies, S. Mallat, Y. Meyer, L. Raphael, and B. Ruskai, eds. : *Wavelets and Their Applications*, Jones and Bartlett, Cambridge, MA, 1992

17. Chui, C. K., ed. : *Approximation Theory and Functional Analysis*, Academic Press, Boston. 1991

18. Chui, C. K., ed. : *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, Academic Press, Boston, 1992

19. Combes, J. M. ; A. Grossmann, and P. Tchamitchian, eds. : *Wavelets: Time-Frequency Methods and Phase Space*, Springer-Verlag, New York, 1989; Second Edition, 1991

20. Daubechies, I. : *Wavelets*, CBMS-NSF Series in Appl. Math., SIAM Publ., Philadelphia, 1992

21. Meyer, Y. : *Ondelettes et Opérateurs*, Vol. I and Vol. II, Hermann, Paris, 1990. Also, Meyer, Y. and R. R. Coifman, Vol. III, 1991

信号与图象处理

22. Auslander, L., T. Kailath, and S. Mitter, eds. : *Signal Processing I: Signal Processing Theory*, The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications #22, Springer-Verlag, New York, 1990
23. Chui, C. K. and G. Chen: *Kalman Filtering with Real-Time Applications*, Springer Series in Information Sciences # 17, Springer-Verlag, New York, 1987; Second Edition 1991
24. Chui, C. K. and G. Chen: *Signal Processing and Systems Theory · Selected Topics*, Springer Series in Information Sciences # 26, Springer Verlag, New York, 1992
25. Oppenheim, A. V. and R. W. Schafer: *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice Hall Signal Proc. Series, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989
26. Rosenfeld, A., ed. : *Multiresolution Image Processing and Analysis*, Springer Series in Information Sciences # 12, Springer Verlag, New York, 1984

论文

27. Auscher, P. : Ondettes fractales et applications, Thèse de Doctorat, University Paris-Dauphine, 1989
28. Battle, G. : A block spin construction of ondelettes, Part I: Lemarié functions, *Comm. Math. Phys.* **110** (1987), 601-615
29. Burt, P. J. and E. H. Adelson: The Laplacian pyramid as a compact image code, *IEEE Trans. Comm.* **31** (1983), 482-540
30. Calderón, A. P. : Intermediate spaces and interpolation, the complex

method. *Studia Math.* **24**(1964),113-190

31. Chui, C. K.: Construction and applications of interpolation formulas, in *Multivariate Approximation and Interpolation*, W. Haussmann and K. Jetter(eds.).ISNM Series Math.,Birkhauser Verlag,Basel,1990,11-23
32. Chui,C. K.: Vertex splines and their applications to interpolation of discrete data, in *Computation of Curves and Surfaces*,W. Dahmen, M. Gasca,and C. A Micchelli(eds.),Kluwer Academic Publishers, 1990,137-181
33. Chui,C. K. and H. Diamond: A characterization of multivariate quasiinterpolation formulas and applications, *Numer. Math.* **57** (1990).105-121
34. Chui, C. K. and H. Diamond: A general framework for local interpolation, *Numer,Math.* **58**(1991),569-581
35. Chui, C. K. and H. Diamond: A natural formulation of quasi-interpolation by multivariate splines, *Proc. Amer. Math. Soc.* 99 (1987).643-646
36. Chui, C. K. and M. J. Lai: Computation of box splines and *B*-splines on triangulations of nonuniform rectangular partitions, *Approx. Th. and Its Appl.* **3**(1987),37-62
37. Chui,C. K. and X. L. Shi: Inequalities of Littlewood-Paley type for frames and wavelets, CAT Report #249,Texas A&M University, 1991
38. Chui, C. K. and X. L. Shi: On a littlewood-Paley identity and characterization of wavelets, CAT Report # 250, Texas A&M University, 1991
39. Chui, C. K. and J. Z. Wang: An analysis of cardinal spline-wavelets, *J. Approx. Theory*, to appear
40. Chui, C. K. and J. Z. Wang: A cardinal spline approach to

wavelets, *Proc. Amer. Math. Soc.* **113**(1991),785-793

41. Chui, C. K. and J. Z. Wang: A general framework of compactly supported splines and wavelets, *J. Approx. Theory*, to appear
42. Chui, C. K. and J. Z. Wang: Computational and algorithmic aspects of cardinal spline-wavelets, CAT Report # 235, Texas A&M University, 1990
43. Chui, C. K. and J. Z. Wang: On compactly supported spline wavelets and a duality principle, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1991, to appear
44. Cohen, A.: Ondelettes, Analysis multirésoltions et traitement numerique du signal, Doctoral Thesis, Univ. Paris-Dauphine, 1990.
45. Cohen, A. and I. Daubechies: Nonseparable bidimensional wavelet bases, AT&T Bell Laboratories, 1991, preprint
46. Cohen, A., I. Daubechies, and J. C. Feauveau: Bi-orthogonal bases of compactly supported wavelets, *Comm. Pure and Appl. Math.*, 1991, to appear.
47. Coifman, R., Y. Meyer, S. Quake, and M. V. Wickerhauser: Signal processing and compression with wave packets, in Proceedings of the Conference on Wavelets. Marseilles, Spring 1989
48. Coifman, R.; Y. Meyer, and M. V. Wickerhauser: Wavelet analysis and signal processing, 1991, preprint
49. Daubechies, I.: Orthonormal bases of compactly supported wavelets, Comm. Pure and Appl. Math. **41**(1988), 909-996
50. Daubechies, I.: The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis, *IEEE Trans. Inform. Theory* **36** (1990), 961-1005.
51. Duffin, R. J. and A. C. Schaeffer: A class of nonharmonic Fourier series, *Trans. Amer. Math. Soc.* **72**(1952), 341-366

52. Frazier, M. and B. Jawerth: Decomposition of Besov spaces, *Indiana University Math. J.* **34**(1985), 777 799

53. Gabor, D.: Theory of communication, *J. IEE(London)* **93**(1946), 429-457

54. Grossmann, A. and J. Morlet: Decomposition of Hardy function into square integrable wavelets of constant shape, *SIAM J. Math. Anal.* **15**(1984), 723-736

55. Haar, A.: Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, *Math. Ann.* **69**(1910), 331-371

56. Lemarié, P. G.: On delettes à localisation exponentielles, *J. Math. Pure et Appl.* **67**(1988), 227-236

57. Mallat, S.: A theory of multiresolution signal decomposition: the wavelet representation, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.* 11 (1989), 674-693

58. Mallat, S.: Multiresolution representations and wavelets, Ph. D. Thesis, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA, 1988

59. Mallat. S.: Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(R)$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **315** (1989), 69-87

60. Mallat, S. and W. L. Hwang: Singularity detection and processing with wavelets, 1991, preprint

61. Mallat, S. and S. Zhong: Reconstruction of functions from the wavelet transform local maxima, 1990, preprint

62. Mallat, S. and S. Zhong: Wavelet transform maxima and multiscale edges, in *Wavelets and Their Applications*, G. Beylkin, R. Coifman, I. Daubechies, S. Mallat, Y. Meyer, L. Raphael, and B. Ruskai(eds.), Jones and Bartlett, Cambridge, MA, 1991

63. Meyer, Y.: Ondelettes et functions splines, *Séminaire EDP*, Ecole Polytechnique, Paris, December 1986

64. Meyer, Y.: Principe d'incertitude, bases Hilbertiennes et algèbres d'opérateurs, *Séminaire Bourbaki* **662**(1985 1986)

65. Schoenberg, I. J.: Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, *Quart. Appl. Math.* **4** (1946), 45-99, 112-141

66. Schweinler, H. C. and E. P. Wigner: Orthogonalization methods. *J. Math. Phys.* 11(1970), 1693-1694

67. Strömberg, J. O.: A modified Franklin system and higher order spline systems on R^n as unconditional bases for Hardy spaces, in *Proc. Conf. in Honor of Antoni Zygmund*, Vol. Ⅱ, W. Beckner, A. P. Calderón, R. Fefferman, and P. W. Jones(eds.), Wadsworth, NY, 1981, 475-493

68. Tchamitchian, Ph.: Biorthogonalité et théorie des opérateues. *Rev. Math. Iberoamericana*, to appear

69. Tchamitchian, Ph.: Calcul symbolique sur les opérateurs de Caldéron-Zygmund et bases inconditionnells de $L^2(\mathrm{IR}^n)$, *C. R. Acad. Sc. Paris* **303**(1986), 215-218

70. Vetterli, M. and C. Herley: Wavelets and filter banks: theory and design, *IEEE ASSP*, 1992, to appear

虽然小波分析相对来说是一个新的课题，但已经有大量的文献致力于它的理论研究和应用以及若干有关的领域。这里所给出的一系列参考文献只反映在本书中涉及到的和在注解中讨论用到的。更广泛的文献目录包括在本系列丛书的第二卷，《WAVELETS A Tutorial in Theory and Applications》。

索　　引

B

Banach 空间(Banach space)　31，47
Banach-Steinhaus 定理(Banach-Steinhaus Theorem)　97,98
Battle-Lemariė 小波(Battle-Lemariė wavelets)　344
Bernstein 多项式(Bernstein polynomial)　129～131
Bernstein 多项式算子(Bernstein polynomial operator)　128,129
Bessel 不等式(Bessel Inequality)　50,52,56,94,312,316
Boolean 和(Boolean sum)　342
B-小波(B-wavelet)　253,254,255,267,268,275,282,287,291,295,339
B-网(B-net)　128～132,135,268,342
B 网算法(B net algorithm)　132,268,342
B-样条(B-spline)　23,24,72,74,78,109,114,115,118,122,124,128,132,134,136,149,150,158,164,165,166,173,188,218,225,226,229,241～247,252～255,260,265,268,276,278,279,282,287,295,298,339,342
比例换算过程(Scaling process)　143
半正交(Semi-orthogonal(S. O))　20,21,24,100,103～107,230～234,243,251,252,299
半正交小波(Semi orthogonal wavelet)
变缩(Variation-diminishing)　290

倍频程(Octave)　80,162,217,335
部分和(Partial sum)　49～52

C

Cauchy 序列(Cauchy sequence)　44,52
尺度函数(Scaling function)　22,25,28,123,160,153,164,170～175,181,183,188,199,217,220,222,224,225,229～234,244,251,258,267,297～299,304,305,317～320,324,328～333,342
微分算子(Differential operator)　112,250,291
重构公式(Reconstruction formula)　12,13,14,93
重构算法(Reconstruction algorithm)　27,123,172,179,197,212,216,217,275,337,342
插入图形显示算法(Interpolatory graphical display algorithm)　122,124,126,128,258
常数 Q(Constant Q)　83
测不准原理(Uncertainty Principle)　65,66,71,75,76,109,340
窗口逆 Fourier 变换(Window inverse Fourier transform)　70
窗函数(Window function)　9～12,14,65～75,79,81,340
测度为零(Measure zero)　30,339,340

D

Daubechies 尺度函数(Daubechies scaling function)　174,324
Daubechies 小波(Daubechies wavelets)　324
Dirichlet-Jordan 检验法(Dirichlet-Jordan Test)　57
Dirichlet 核(Dirichlet kernel)　49,53
δ-函数(Delta function)　35,39

对称(Symmetric) 19,20,24,28,109,115,126,138,150,161,
181,184,187,189,219,220,224,226,229,233,234,241,252,
255,272,285,342
对称零点(Symmetric zero) 181
代数(Algebra) 119,189,191
对偶(Dual) 11～19,20,29,90,91,94,97,100,103～108,160,
161,164,198,200,201,204,205,206,209,211,229～235,
238,241,251,253,254,297,304,339,341
对偶尺度函数(Dual scaling function) 233
对偶原理(Duality principle) 201,213,342
多分辨分析(Multiresolution analysis,MRA) 21～25,160～163,
172,180,188,197,199,204,217,230,243,339,342,343
多项式样条(Polynomial spline) 109
多项式再生(Polynomial-reproduction) 156
单频率(Single-frequency) 5
单边次数(One sided degree) 180
倒数多项式(Reciprocal polynomial) 181
递推方案(Recursive scheme) 174,175,259,263,265
带宽(Bandwidth) 82
短时 Fourier 变换(Short-time Fourier transform(FTFT)) 65,74,
78,79,80,340
叠加(Superposition) 3

E

Euler-Frobenius 多项式(Euler-Frobenius polynomial) 63,150,151,
181,233,250,252,268,269,274,276,279,281,288
二进小波(Dyadic wavelet) 15,86～91,98,100
二进对偶(Dyadic dual) 90,91,108

二进位移(Dyadic translation)　5
二进展开(Dyadic expansion)　329
二进膨胀(Binary dilation)　5,7
二阶平均极限(Limit in the mean of order two)　43

F

Fatou 引理(Fatou's lemma)　42
Fejér 核(Fejér kernel)　53
Fourier 分析(Fourier analysis)　2,7,29,36
Fourier 系数(Fourier coefficients)　2,6,48～52,56,57,62
Fourier 级数(Fourier series)　49～52,59,64,300,312
Fourier 变换(Fourier transform)　7～9,15,29,31～36,39,40～52,56,58,61,65～70,71～75,79,89,90,98,100～103,122,151,164,169,175,182,185,194,195,218,219,298,299,300,308,314,325,329,330,340
Fubini 定理(Fubini Theorem)　36
分解算法(Decomposition algorithm)　275,278
分解关系(Decomposition relation)　26,192,197,212～215,275
分段连续(Piecewise continuous)　2,30,109
反射(Reflection)　45,61,88,136
反对称性(Antisymmetry)　20,24,28,220,229,255
反演公式(Inverse formula)　11
复原(Recover)　34
范数(Norm)　3,5,7,30,43
阈值(Thresholding)　217
符号(Symbol)　5,28,48,63,102,137～141,150,164,167,170,173～176,181～185,187～190,198,199,200,222,224,225,231,232,234,235,237,246,247,251～254,266,297,298,

299,304,305,319,320,324
规范正交基(Orthonormal basis) 6,161,336
规范正交族(Orthonormal family) 100,170,225,226,229
规范正交化过程(Orthonormalization procedure) 105,299,341

G

Gabor 变换(Gabor transform) 65～73,78,340
Gabor 窗(Gabor window) 71
Gaussian 函数(Gaussian function) 34,36,65,66,71,72,74～78,85,103,255,340
广义 Euler-Frobenius Laurent 多项式(Generalized Euler-Frobenius Laurent polynomial) 181,231,232,247,251,276,299
广义 Euler-Frobenius 多项式(Generalized Euler-Frobenius polynomial) 181,233
广义线性相位(Generalizing linear phase) 217～225, 229, 233～236,238
广义 Minkowski 不等式(Generalized Minkowski Inequality) 48,54,303

H

Haar 函数(Haar function) 6,72,233,234,299,338
Haar 小波(Haar wavelet) 225,244
Heaviside 单位阶跃(Heaviside unit step) 32
Hilbert 空间(Hilbert space) 31,48,112,160,297
混合算子(Blending operation) 156

J

节点序列(Knot sequence)　110,114,120,124,134,155,217,248,265

近似恒等(Approximate identity)　36

均方根持续时间(Root mean square(RMS) duration)　67,73

均方根带宽(Root mean square(RMS) bandwidth)　73,335

卷积(Convolution)　23,29,35,36,39,49,53,62,75,138,140,144,189,253

　卷积恒等(Convolytion identity)　36,39

矩阵算子(Matrix operatior)　96

积分小波变换(Integral wavelet transform,IWT)　7～19,65,68,79,80,81,87,99,106,212,213,214,255,338

紧支撑(Compactly supported)　20,24,28,61,63,72,75,113,161,177,188,225,229～234,241,151,252,258,260,275,297,317～321,324,343,344

基小波(Basic wavelet)　7,9～15,79,80,81,83,85～89,109,161,212,213,214,255,338

基本样条(Fundamental spline)　148,339

基本基数样条函数(Fundamental cardinal spline function)　149,151,244

基函数(Basic function)　3,4

基数B-样条(Cardinal B-spline)　23,74,114,132,136,137,149,166,173,175,188,218,225,229,244,245,247,252,255,263,268,279,282,290,342

K

开映射定理(Open Mapping Theorem)　97,98

可交换的(Commutative)　35,106
可结合的(Associative)　35
可测函数(Meassurable function)　61
嵌套序列(Nested sequence)　22,23,114,122,160～163,243,308
框架(Frames)　15,66,91,109,211,338,341
控制网(Control net)　129
控制收敛定理(Dominated Convergence Theorem)　32,42,171,325
宽度(Width)　9,10,66,67,70,73,74,80,83,340

L

Laplacian 金字塔算法(Laplacian pyramid algorithm)　339
Laurent 多项式(Laurent polynomial)　63,138,150,180,232,233,234～238,247,251,276,285,299,317,318,319,320
Laurent 级数(Laurent series)　167,189,198～200,252,277,279,299,304,317
Lebesque 积分理论(Lebesque integration theory)　32,41
Lebesque 理论(Lebesque theory)　2,30,44
Leibniz 法则(Leibniz Rule)　117
Littlewood-Paley 恒等式(Littlewood-Paley Identity)　338,341
l^2-线性组合(l^2-linear combination)　4
L^2(IR)闭包(L^2(IR)-closure)　113,114
两尺度关系(Two-scale relation)　122～124,163,168,172,173,178～184,188,224,231,233,234,245,258,295
两尺度序列(Two-scale sequence)　160,164,174,175,220～224,233,246,251,289,297,328,342
两尺度符号(Two-scale symbol)　164,167,170,173～176,181～185,188～190,198,199,200,222,224,225,231,232,234,235,237,246,247,251～254,266,297,298,299,304,

305,319,320,324
连续模(Modulus of continuity)　53,57,167,168
离散 Fourier 变换(Discrete Fourier transform)　49～52,56,185,218
量化(Quautization)　28
零交叉(Zero-crossings)　287,295

M

Meyer 小波(Meyer wavelets)　344
Minkowski 不等式(Minkowski Inequality)　30,47,54,303
母小波(Mother wavelet)　338
脉冲响应(Impulse response)　28
脉冲系列(Impulse train)　267
模拟信号(Analog signal)　7,8,9,29,48,65,66,70,73,75,81,217
模糊的(Blurred)　24

N

Nyquist 速率(Nyquist rate)
内积(Inner product)　3,5,8,31,44,47,48,107
逆 Fourier 变换(Inverse Fourier transforms)　30,65
拟插值(Quasi-interpolation)　142～148,153～157,243,342
拟插值算子(Quasi-interpolation operator)　142～146,153～157,342

P

Parseval 恒等式(Parseval Identity)　3,8,10,41,44,46,52,56,57,

62,69,72.74,77,79,82～84,88,101,102,103,283,312,317
Pascal 三角形算法(Pascal triangular algorithm,PTA)　260,261,262,343
Poisson 求和公式(Poisson Summation Formula)　29,60,61,137,150,164,182,269,301,340
Pólya 频率序列(Pólya frequence(PF) sequences)　288,289,290
平方可积(Square-integrable)　2～4,40
平方可和序列(Square-summable sequence)　16
频域(Frequency-domain)　8
频带(Frequency band)　8,11,80,82,87,162,217,335,336
频率局部化(Frequency-localization)　10
频率窗(Frequency window)　10,74,82
频谱(Spectrum)　8,10,66,70,75
谱信息(Spectral information)　8,29,66,67,74,162

Q

全正性(Total positivity)109,287,290,343
全正核(Total positive kernel)　287,290
全正矩阵(Total positive matrix)　288,294
权(Weight)　28,37,42,127,135,275,276,337
抽样空间(Sample space)　213,217,243
抽样速率(Sampling rate)　92～95,98,99,107

R

Riemann-Lebesque 引理(Riemann-Lebesque Lemma)　32,36
Riesz 基(Riesz basis)　16～22,95,96,98,100,104～106,114,122,125,162～165,170,182,192,194～198,249,250,251,253,

279,292,308,209
Riesz 界(Riesz bound)　97,104,119
Riesz 引理(Riesz Lemma)　321,344
Riesz-Fischer 定理(Riesz-Fischer Theorem)　51
容许的两尺度符号(Admissible two-scale symbol)　167,175

S

Schwarz 不等式(Schwarz Inequality)　31,40,41,72,76,313
Sobolev 空间(Sobolev space)　142
双正交性 (Bi-orthogonality)　21
失真(Distortion)　24,28,217
时间局部化(Time localization)　10,65,66,79,336
时间尺度坐标(Time-scale coordinate)　19
时间窗(Time window)　10
时域(Time-domain)　8,29,65,75
时-频分析(Time-frequency analysis)　1,8,10～13,29,65,83,99,
109,197
时-频局部化(Time-frequency localization)　14,29,72,75,255,229
时-频窗的高(Height of the time-frequency window)　71
时-频窗的宽度(Width of the time-frequency window)　71,74
实时(Real-time)　23,65,109,124,143,148,154,172,179,243
实直线上(On-line)　109,143,148
树分解算法(Tree decomposition algorithm)　337
数字信号(Digital signal)　29,48

T

Toeplitz 矩阵(Toeplitz matrix)　287

同构(Isometric)　3,56
图形显示(Graphical display)　109,122,124～128,172,179,258,342
图象压缩(Image compression)　338,341

W

Weierstrass 定理(Weiertrass theorem)　52
Wiener 类(Wiener Class)　189,191,304
无限脉冲响应(Infinitte impulse response,IIR)　28,339
无约束基(Unconditional basis)　63,95
完全振荡(Complete oscillation)　287,291
误差分析(Error analysis)　269,275,279,342
稳定性条件(Stability condition)　14,88,89,92,95,338,341

X

小波(Small wave, wavelet)　9,12
小波包(Wave packets,Wavelet packets)　297,328～333,335,344
小波分析(Wavelet analysis)　1,7,29
小波分解(Wavelet decomposition)　25,27,123,213,214,243,275,297,339,343
小波系数(Wavelet coefficient)　6
小波极大(Wavelet maxima)　341
小波级数(Wavelet series)　5～7,17,19,66,99,106,161,217,267,287,291,295,333,336
向下抽样(Downsampling)　27,216
向上凹(Concave upward)　129
向后差分(Backward differences)　112

形状(Shape)　129
线性泛函(Linear functional)　38,145
线性 Pascal 三角形算法(Linear Pascal triangular algorithm, LPTA)　261,289,290
线性相位(Linear phase)　10,82,217,218～225,229,233～236,238,343
线性相位滤波(Linear-phase filtering)　28,161,217,229
相位位移(Phase-shift)　10,82,86
修改的 Euler-Frobenius 多项式(Modified Euler-Frobenius polynomial)　281
斜对称(Skew-Symmetric)　219,224,229,233,234,241

Y

压缩数据(Compressed data)　24
有界线性泛函(Bounded linear functional)　139
有界线性局部样条算子(Bounded linear local spline operator)　139
有界线性算子(Bounded linear operator)　43,92,142
有界变差(Bounded variation)　58,61,63
有限两尺度关系(Finite two-scale relations)　172,180
有限能量(Finite energy)　7,48,66,217
有限脉冲响应(Finite impulse response, FIR)　28
移动平均(Moving average)　27,28,125,135,216,268,275
伸缩移近与移离(Zoom-in and zoom-out)　9,12
圆群(Circle group)　29
预报-校正算法(Predictor-corrector algorithm)　339

Z

子频带(Sub-band)　336
支撑(Support)　23,63,65,72,75,113,115,149,160,177,178,180,183,184,187～189,221,224,225,231,232,251～253,291,295,319,342,344
中心(Center)　9,10,14,67,72,73,74,81～83,87,115
正交和(Orthogonal sum)　20,161,336
正交小波(Orthogonal wacelet)　6,7,9,18～21,100,225,328,338
正弦波(Sinusoidal wave)　4
自对偶(Self-dual)　19,100,105,297
自回归移动平均(Autoregressive moving average ARMA)　28
自回归移动平均序列(ARMA sequences)　28
直接和(Direct sum)　19,20,21,25,26,160,189,190,194
直接和分解(Direct sum decompsition)　161,189,192,197,342
振荡(Oscillation)　260,287,290,291,343
整数膨胀(Integral dilation)　3
整数位移(Integral shifts)　4